

ИНФОРМАТИК

Еженедельная газета Объединения педагогических изданий «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
ПОДПИСКА: (095) 249-47-58



**Врач,
изобретатель,
математик**

В сентябре
исполняется 500 лет
со дня рождения
выдающегося
итальянского ученого
Джероламо Кардано
(1501—1576)

*“Кардано был великим
человеком при всех его
недостатках; без них он
был бы совершенством”.*

Готфрид Вильгельм
Лейбниц



Карданный
вал

Окончание читайте на с. 32

Читайте в номере

Олимпиады 2–7

Л.А. Залогова, С.В. Русаков, И.Г. Семакин, Л.В. Шестакова. Пермская олимпиада по базовому курсу информатики
Продолжаем знакомить читателей с материалами пермской олимпиады по базовому курсу информатики. Сегодня публикуются материалы практического тура (9-й класс). Предложите ребятам выполнить (с вашей помощью) задания, связанные с созданием базы данных, использованием электронной таблицы, применением базы знаний, а также составить программу для исполнителя (Кенгуренка Ру), рисующую узор.

Методика 8, 25–28

Е.В. Андреева. Примерное содержание компьютерного задачника по информатике
“В настоящее время... с точки зрения обучения программированию можно выделить несколько категорий учащихся”. А каким должен быть набор задач для этих категорий?

Материалы к уроку 29–30

В.П. Гладков, А.П. Шестаков. Вопросы, задания и контрольные работы для начинающих программистов
Может ли правильная запись условия (логического выражения) на языке Паскаль иметь вид true and false? Истинно или ложно условие $a \text{ or } a$? Какое значение имеет выражение $a \text{ or not } b$ (при $a = \text{false}$, $b = \text{true}$)? Цель данной публикации — помочь начинающему программисту освоить Паскаль. Ее авторы убеждены, что главным условием успеха тут является большое желание изучить этот язык программирования.

На стенд в кабинете информатики 31

Болонья, Париж, ..., Москва, ...
“Нет такой мысли, кою бы на российском языке изъяснить было невозможно”. Короткий рассказ о создании первых европейских (и главным образом Московского) университетов.

Тематический выпуск 9–24

А.Г. Гейн. Обязательный минимум содержания образования по информатике: и в нем нам хочется дойти до самой сути

Продолжаем публикацию работы, в которой “главы соответствуют разделам обязательного минимума, а параграфы — отдельным вопросам в этих разделах”.
Сегодняшняя тема: “Исследование на компьютере информационных моделей из различных предметных областей”. Исследуется “Полет в среде с сопротивлением”; рассматриваются: задача “Электронный маятник”, модели неограниченного и ограниченного роста; затрагиваются модели систем массового обслуживания. Попутно используются метод наименьших квадратов, методы Монте-Карло.

Пермская олимпиада по базовому курсу информатики

А.А. Залогова, С.В. Русаков, И.Г. Семакин, Л.В. Шестакова,

г. Пермь

Продолжение. См. № 33, 34/2001

9-й класс. Практический тур

Задание № 1 (10 баллов)

Создать базу данных, содержащую следующую информацию:

Имеются сведения о семи пациентах поликлиники.

Трое из них — пенсионеры. Это Быков, возраст которого — 63 года, Власова — 71 год и Захарова — 57 лет.

Возраст других пациентов: Анохин — 35 лет, Гришина — 23 года, Данилов — 29 лет, Калинин — 40 лет.

Каждый пациент относится к определенному участку, который обслуживает поликлиника.

К 1-му участку относятся: Быков и Данилов;

к 2-му участку — Власова, Захарова и Калинин;

к 3-му участку — Анохин и Гришина.

Участковый врач на 2-м участке — Радченко;

1-й и 3-й участки обслуживает участковый врач Маргулис.

С 1 по 5 апреля 2001 года эти пациенты посещали участкового врача.

Калинин посещал врача 1 апреля и 3 апреля. 1 апреля ему был поставлен диагноз “ОРВИ” (острое респираторно-вирусное заболевание), а 3 апреля — диагноз “бронхит”.

Быков посещал врача 1 апреля с диагнозом “ОРВИ” и 5 апреля — “здоров”.

Власова посещала врача 3 апреля с диагнозом “грипп”, а 5 апреля ей был поставлен диагноз “пневмония”.

Анохин посещал врача 3 апреля с диагнозом “холецистит” и 5 апреля — “здоров”.

Гришина посетила врача 4 апреля с диагнозом “ОРВИ”.

Данилов посетил врача 4 апреля с диагнозом “грипп”.

Захарова посетила врача 4 апреля с диагнозом “ОРВИ”.

Обратиться к БД со следующими запросами:

1. Получить список всех пенсионеров старше 60 лет с указанием фамилии пациента и фамилии участкового врача.

2. Получить список всех пациентов участкового врача Маргулиса, которым был поставлен диагноз “ОРВИ”. Вывести фамилию пациента, диагноз и дату установления диагноза. Отсортировать в алфавитном порядке фамилии пациентов.

3. Получить список всех посещений пациентов с 3 по 5 апреля на 2-м участке. В списке вывести фамилию пациента, дату посещения и диагноз. Упорядочить по возрастанию даты посещения.

4. Получить список всех работающих пациентов (не пенсионеров), относящихся к 1-му и 3-му участкам, которые посещали врача 4 или 5 апреля. В списке вывести фамилию, участок и дату посещения. Список упорядочить по фамилии.

Задание № 2 (10 баллов)

Дано расписание движения скорого поезда от Иркутска до Красноярска:

Станция	Расстояние от Иркутска (в км)	Прибытие	Отправление
Иркутск	0		18 ч. 55 мин.
Ангарск	39	19 ч. 43 мин.	19 ч. 45 мин.
Усолье	67	20 ч. 08 мин.	20 ч. 10 мин.
Черемхово	130	21 ч. 04 мин.	21 ч. 06 мин.
Залари	195	21 ч. 59 мин.	22 ч. 01 мин.
Зима	250	22 ч. 54 мин.	23 ч. 14 мин.
Куйтун	310	0 ч. 06 мин.	0 ч. 08 мин.
Тулун	389	1 ч. 14 мин.	1 ч. 16 мин.
Нижеудинск	506	2 ч. 47 мин.	2 ч. 02 мин.
Тайшет	669	5 ч. 40 мин.	5 ч. 45 мин.
Иланская	808	7 ч. 50 мин.	7 ч. 10 мин.
Канск	840	8 ч. 43 мин.	8 ч. 45 мин.
Заозерная	921	9 ч. 54 мин.	9 ч. 56 мин.
Красноярск	1087	12 ч. 51 мин.	

Используя электронную таблицу, определить:

1. Суммарное время движения (без учета времени стоянок).

2. Максимальное время стоянки (мин.).

3. Среднюю длину участка пути (км). Участок — отрезок пути между двумя ближайшими станциями.

4. Максимальное значение средней скорости движения на участке (км/ч.).

Задание № 3 (10 баллов)

Описать базу знаний (БЗ) “Компьютеры”.

Факты БЗ содержат следующую информацию:

Какие фирмы изготавливают составные части вычислительных систем (рис. 1)?

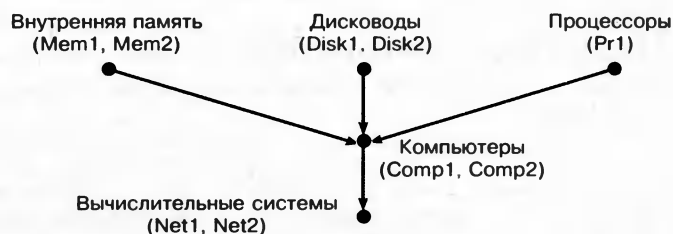


Рис. 1. Фирмы—изготовители составных частей вычислительных систем, названия фирм указаны в скобках

Услугами каких фирм-поставщиков пользуются фирмы-изготовители (рис. 2)?

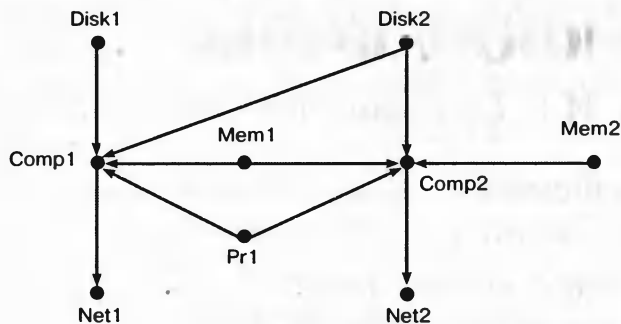


Рис. 2. Взаимодействие фирм-поставщиков и фирм-изготовителей

Замечание. Одна и та же фирма может быть изготовителем и поставщиком, например, "Comp1".

Определить отношение "конкурент". Две фирмы конкурируют, если они выпускают одинаковые устройства.

Определить отношение "использует изделие", которое устанавливает связь между фирмами-поставщиками и фирмами-изготовителями. К примеру, фирма "Comp1" использует изделия фирм "Mem1", "Disk1", "Disk2", "Pr1", а фирма "Net1" — фирм "Mem1", "Disk1", "Disk2", "Pr1", "Comp1".

Получить ответы на вопросы, сформулированные в файле ТАБЛИЦА.DOC.

Запросы к базе знаний (цели) и соответствующие им ответы записать в таблицу.

Указание. Жюри отослать текст программы на Прологе и файл ТАБЛИЦА.DOC, собранные в архив с помощью архиватора.

Таблица для задания № 3 (файл ТАБЛИЦА.DOC).

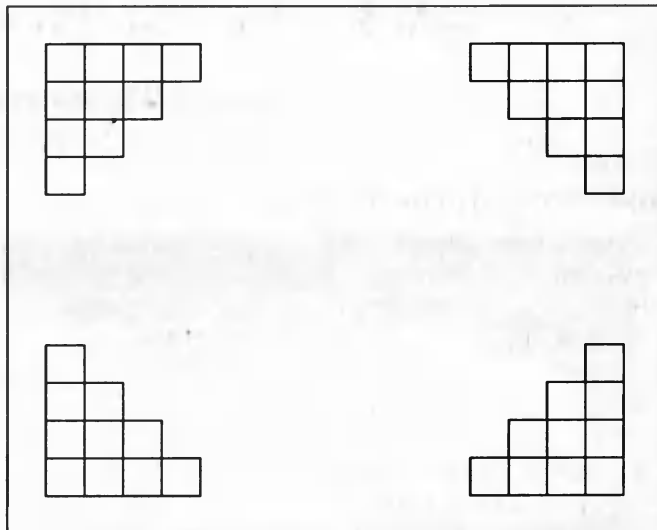
№	Вопрос	Цель	Ответ
1	Какие фирмы производят внутреннюю память?		
2	Изделия каких фирм использует фирма "Net2"? (В ответе должны быть перечислены все фирмы, которые производят составные части вычислительной системы.)		
3	Какие фирмы конкурируют между собой?		
4	Какие фирмы по изготовлению компьютеров конкурируют между собой?		
5	Дисководы каких фирм использует фирма "Comp1"?		
6	Какие фирмы поставляют изделия для фирмы "Comp2"?		
7	Внутреннюю память каких фирм использует фирма "Net2"?		

Задание № 4 (10 баллов)

Для исполнителя (Кенгуренка Ру) составить программу, которая рисует предложенный узор (внешняя рамка — граница рабочего поля).

Указания:

1. Начальное состояние исполнителя может быть произвольным.
2. Программа должна заканчиваться безаварийно.
3. Программа должна содержать не более 55 строк (за лишние строки будут начисляться штрафные баллы: 5 строк — минус 1 балл).



Критерии судейства

Задание № 1 (10 баллов)

Баллы снимаются за следующие ошибки:

1. Невыполненный или неверно выполненный запрос: минус 2 балла за каждый.
2. Неверная структура таблицы (неверно заданы типы, неправильно назначен ключ): минус 2 балла за каждую ошибку.
3. База не нормализована (все в одной таблице): минус 2 балла; частично нормализована (2 таблицы): минус 1 балл.
4. Ошибки при вводе исходных данных: минус 0,5 балла за каждую.

Примечание. Если запрос сконструирован правильно, но результат не совпадает с тестовым из-за ошибки при вводе исходных данных, то такой запрос считается верным.

Задание № 2 (10 баллов)

Баллы снимаются за следующие ошибки:

1. Расчеты выполнены вручную (не использованы формулы): минус 2 балла за каждый столбец.
2. Ошибки при вводе исходных данных: минус 1 балл.

Примечание. Ученик может построить таблицу иначе, чем это показано в образце (см с. 6). Если при этом решение получается верным, то оценка не снижается.

Задание № 3 (10 баллов)

Баллы снимаются за следующие ошибки:

1. За неверно сформулированную цель на вопросы 1—4: минус 1 балл за каждую цель; на вопросы 5—7: минус 0,5 балла за каждую цель.
2. За неверные ответы на цели-запросы 1—4: минус 1 балл за каждый ответ; на вопросы 5—7: минус 0,5 балла за каждый ответ.

Задание № 4 (10 баллов)

Баллы начисляются только при выдаче программой правильной картинки.

Баллы снимаются за следующие ошибки:

1. По завершении работы произошел аварийный останов (минус 3 балла).

2. Рисунок строится правильно не из любого начального состояния (минус 3 балла).

3. Размер программы превышает требуемый. За каждые 5 лишних строк — минус 1 балл.

Указание. Если за выполненное задание сумма штрафных баллов превышает 10, то команде начисляется 0,5 балла.

Варианты решения**Задание № 1**

Структура таблицы "Участки":

Участки : таблица		
	Имя поля	Тип данных
?	Участок	Числовой
	Врач	Текстовый

Данные в таблице "Участки":

Участок	Врач
1	Маргулис
2	Радченко
3	Маргулис

Структура таблицы "Пациенты":

Пациенты : таблица		
	Имя поля	Тип данных
?	Фамилия	Текстовый
	Возраст	Числовой
	Пенсия	Логический
	Участок	Числовой

Данные в таблице "Пациенты":

Фамилия	Возраст	Пенсия	Участок
Анохин	35	Нет	3
Быков	63	Да	1
Власова	71	Да	2
Гришина	23	Нет	3
Данилов	29	Нет	1
Захарова	57	Да	2
Калинин	40	Нет	2

Структура таблицы "Посещения":

Посещения : таблица		
	Имя поля	Тип данных
?	Фамилия	Текстовый
?	Дата	Дата/время
	Диагноз	Текстовый

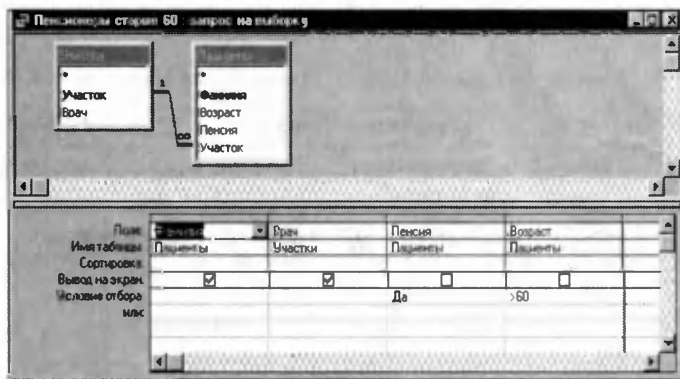
Данные в таблице "Посещения"

Фамилия	Дата	Диагноз
Быков	01.04.01	ОРВИ
Калинин	01.04.01	ОРВИ
Калинин	03.04.01	Бронхит
Анохин	03.04.01	Холестистит
Власова	03.04.01	Грипп
Захарова	04.04.01	ОРВИ
Данилов	04.04.01	Грипп
Гришина	04.04.01	ОРВИ
Анохин	05.04.01	Здоров
Власова	05.04.01	Пневмония
Быков	05.04.01	Здоров

ЗАПРОСЫ

Запрос на выборку: пенсионеры старше 60 лет

Запрос в режиме конструктора запросов Access:



Запрос на SQL*:

```
SELECT Пациенты.Фамилия, Участки.Врач
FROM [Участки] INNER JOIN Пациенты ON
Участки.Участок = Пациенты.Участок
WHERE ((Пациенты.Пенсия)=Yes) AND
((Пациенты.Возраст) > 60));
```

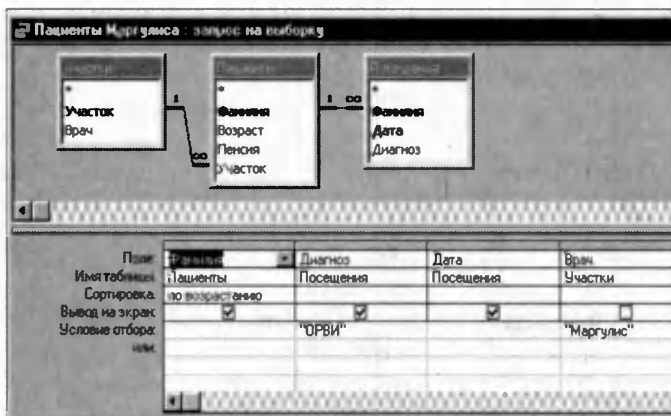
Результат запроса

Фамилия	Врач
Быков	Маргулис
Власова	Радченко

* Здесь и далее использован диалект Access SQL.

Запрос на выборку: пациенты Маргулиса

Запрос в режиме конструктора запросов Access:



Запрос на SQL:

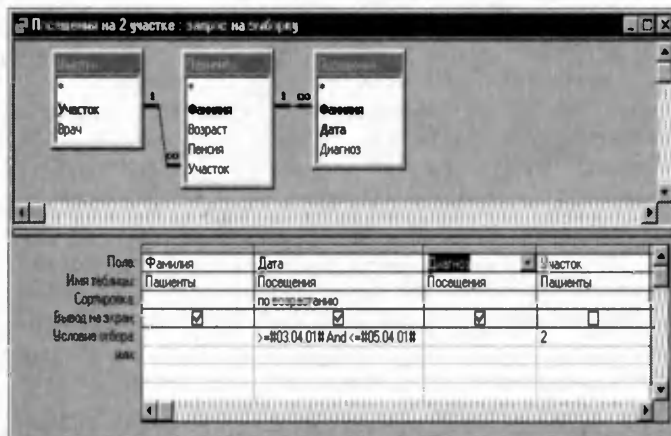
```
SELECT Пациенты.Фамилия, Посещения.Диагноз,
Посещения.Дата
FROM [Участки] INNER JOIN (Пациенты INNER JOIN
Посещения ON Пациенты.Фамилия =
Посещения.Фамилия) ON Участки.Участок =
Пациенты.Участок
WHERE (((Посещения.Диагноз) = "ОРВИ") AND
((Участки.Врач) = "Маргулис"))
ORDER BY Пациенты.Фамилия;
```

Результат запроса

Фамилия	Диагноз	Дата
Быков	ОРВИ	01.04.01
Гришина	ОРВИ	04.04.01

Запрос на выборку: посещения на 2-м участке

Запрос в режиме конструктора запросов Access:



Запрос на SQL:

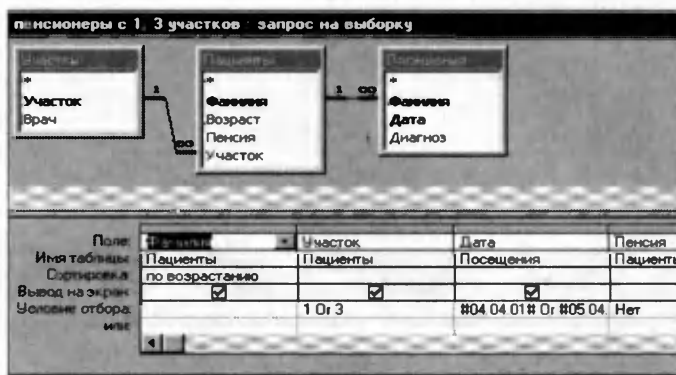
```
SELECT Пациенты.Фамилия, Посещения.Дата,
Посещения.Диагноз
FROM [Участки] INNER JOIN (Пациенты INNER JOIN
Посещения ON Пациенты.Фамилия =
Посещения.Фамилия) ON Участки.Участок =
Пациенты.Участок
WHERE (((Посещения.Дата) >= #4/3/2001# And
(Посещения.Дата) <= #4/5/2001#) AND
((Пациенты.Участок) = 2))
ORDER BY Посещения.Дата;
```

Результат запроса

Фамилия	Дата	Диагноз
Калинин	03.04.01	Бронхит
Власова	03.04.01	Грипп
Захарова	04.04.01	ОРВИ
Власова	05.04.01	Пневмония

Запрос на выборку: работающие пациенты

Запрос в режиме конструктора запросов Access:



Запрос на SQL:

```
SELECT Пациенты.Фамилия, Пациенты.Участок,
Посещения.Дата
FROM [Участки] INNER JOIN (Пациенты INNER JOIN
Посещения ON Пациенты.Фамилия =
Посещения.Фамилия) ON Участки.Участок =
Пациенты.Участок
WHERE (((Пациенты.Участок) = 1 Or
(Пациенты.Участок) = 3) AND ((Посещения.Дата) =
#4/4/2001# Or (Посещения.Дата) = #4/5/2001#)
AND ((Пациенты.Пенсия) = No))
ORDER BY Пациенты.Фамилия;
```

Результат запроса

Фамилия	Участок	Дата
Анохин	3	05.04.01
Гришина	3	04.04.01
Данилов	1	04.04.01

Задание № 2

Таблица с результатом (примерный вид).

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	І	Ј
1	Станция	Расст. от Иркутска	Приб. (ч.)	Приб. (мин.)	Отпр. (ч.)	Отпр. (мин.)	Стоянка (мин.)	Время движ. (ч.)	Длина участка (км)	Ср. скорость (км/ч.)
2	Иркутск	0			18	55				
3	Ангарск	39	19	43	19	45	2	0,80	39	48,75
4	Усолье	67	20	8	20	10	2	0,38	28	73,04
5	Черемхово	130	21	4	21	6	2	0,90	63	70,00
6	Залари	195	21	59	22	1	2	0,88	65	73,58
7	Зима	250	22	54	23	14	20	0,88	55	62,26
8	Куйтун	310	0	6	0	8	2	0,87	60	69,23
9	Тулун	389	1	14	1	16	2	1,10	79	71,82
10	Нижнеудинск	506	2	47	3	2	15	1,52	117	77,14
11	Тайшет	669	5	40	5	45	5	2,63	163	61,90
12	Иланская	808	7	50	8	10	20	2,08	139	66,72
13	Канск	840	8	43	8	45	2	0,55	32	58,18
14	Заозерная	921	9	54	9	56	2	1,15	81	70,43
15	Красноярск	1087	12	51				2,92	166	56,91
16										
17	Суммарное время движения (ч.):		16,67							
18	Максимальная скорость движения (км/ч.)		77,14							
19	Максимальная стоянка (мин.)		20							
20	Средняя длина участка (км)		83,62							

Формула в ячейке G3: =ЕСЛИ(Е3>=С3;Е3*60+Ф3-С3*60-Д3;(Е3+24)*60+Ф3-С3*60-Д3). (Формулы в ячейках G4—G14 получаются "сдвигом" данной формулы.)

Формула в ячейке H3: =ЕСЛИ(Е14<=С15;С15+Д15/60-Е14-Ф14/60;С15+24+Д15/60-Е14-Ф14/60). (Формулы в ячейках H4—H15 получаются "сдвигом" данной формулы.)

Формула в ячейке I3: =В3-В2. (Формулы в ячейках I4—I15 получаются "сдвигом" данной формулы.)

Формула в ячейке J3: =I3/H3. (Формулы в ячейках J4—J15 получаются "сдвигом" данной формулы.)

Формула в ячейке C17: =СУММ(H3:H15).

Формула в ячейке C18: =МАКС(J3:J15).

Формула в ячейке C19: =МАКС(G3:G14).

Формула в ячейке C20: =СРЗНАЧ(I3:I15).

Задание № 3

predicates

```
/* составная часть вычислительной системы (первый аргумент) изготавливается фирмой (второй аргумент) */
do(symbol, symbol)
/* фирма (первый аргумент) поставляет изделия другой фирме (второй аргумент) */
post(symbol, symbol)
/* фирма (первый аргумент) конкурирует с фирмой (второй аргумент) */
conc(symbol, symbol)
/* в изделиях фирмы (первый аргумент) используются изделия фирмы (второй аргумент) */
use(symbol, symbol)
```

clauses

```
do(memory, mem1). do(memory, mem2).
do(disk, disk1). do(disk, disk2).
do(processor, pr1).
do(computer, comp1). do(computer, comp2).
do(vs, net1). do(vs, net2).
post(disk1, comp1).
```

```

post(disk2, comp1). post(disk2, comp2).
post(mem1, comp1). post(mem1, comp2).
post(mem2, comp2).
post(pr1, comp1). post(pr1, comp2).
post(comp1, net1). post(comp2, net2).

```

```

conc(X, Y):- do(Z, X), do(Z, Y), X<Y.
use(X, Y):- post(Y, X).
use(X, Y):- post(Y, Z), post(Z, X).

```

Цели и ответы к ним:

1. **do(memory, X)**
X = mem1, X = mem2.
2. **use(net2, X)**
X = comp2, X = disk2,
X = mem1, X = mem2, X = pr1.
3. **conc(X, Y)**
X = mem1, Y = mem2
X = disk1, Y = disk2
X = comp1, Y = comp2
X = net1, Y = net2.
4. **conc(X, Y), do(computer, X),
do(computer, Y)**
X = comp1, Y = comp2
5. **use(comp1, X), do(disk, X)**
X = disk1, X = disk2.
6. **use(comp2, X)**
X = disk2, X = mem1, X = mem2, X = pr1.
7. **use(net2, X), do(memory, X)**
X = mem1, X = mem2

Задание № 4

Примерный вариант программы для Кенгуренка Ру:

```

сделай узор
сделай узор
сделай узор
сделай узор

```

```

процедура на_край
пока впереди не край, повторять
прыжок
конец цикла
поворот
конец процедуры
процедура угол_1
шаг
шаг
шаг
шаг
поворот
шаг
конец процедуры
процедура угол_2
шаг
шаг
поворот
шаг
шаг
конец процедуры
процедура узор
сделай на_край
сделай на_край
сделай угол_1
поворот
сделай угол_1
поворот
прыжок
поворот
сделай угол_1
поворот
сделай угол_1
прыжок
поворот
шаг
сделай угол_2
поворот
шаг
сделай угол_2
прыжок
поворот
сделай угол_2
шаг
поворот
конец процедуры

```

Окончание следует

	Приглашаем принять участие во 2-м Бизнес-форуме КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В РАЗВИТИИ СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО РЕГИОНА РОССИИ	
28-29 ноября 2001г., С.Петербург, выставочный комплекс Ленэкспо, павильон № 6		
Пленарное заседание		
Тенденции развития глобального IT-рынка и его влияние на компьютерный бизнес в России. Состояние и перспективы рынка компьютерных технологий в России.		
Специализированные секции		
1. Эффективное управление предприятием. Комплексный подход в решении задач автоматизации. 2. Интернет-решения для вашего бизнеса. Рынок, услуги, технологии, законодательство. 3. Современные САПР. Комплексные решения для проектирования и подготовки производства нового поколения. 4. Образование и НИТ. Современные методы, методики, системы и средства обучения. (Спонсор секции – компания REDCENTER, г. Москва)		
<i>В программе секции: Развитие единой образовательной информационной среды в Северо-Западном регионе России. Современные технологии обучения. Internet-образование. Активные средства обучения. Информационно-аналитические системы управления образовательными учреждениями.</i>		
Круглые столы		
1. Проблемы защиты прав интеллектуальной собственности на компьютерном рынке России. 2. Электронный бизнес сегодня. Прогнозы и ожидания.		
Выставки		
"ИНВЕКОМ", "ИНЭЛ", "EDUCOM", "ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ".		
Телефоны: (812) 235-7391, (812) 320-8098. Факс: (812) 320-8090. E-mail: inftech@restec.spb.su		

Примерное содержание компьютерного задачника по информатике

Е.В. Андреева,
Москва

Введение

В прошлом номере “Информатики” было рассказано о некоторых аспектах автоматизации проверки учебных и олимпиадных задач по информатике. После решения технических проблем на первый план выходят проблемы наполнения содержанием созданной программной оболочки. То есть прежде всего необходимо определить, какими возможностями должна обладать подобная система, для того чтобы ее можно было бы эффективно использовать в процессе обучения, в частности, программированию, какие задачи и задания она должна содержать и как в дальнейшем пополнять и изменять набор имеющихся задач, как эти задачи должны проверяться и оцениваться и, в конце концов, какую информацию по результатам проверки и в каком виде должна предоставлять система преподавателю. В данной статье сконцентрируем внимание на наиболее сложной из перечисленных проблем — формировании наборов задач для различных категорий учащихся.

Потребности создания компьютерного задачника для различных категорий учащихся

В настоящее время в нашей стране с точки зрения обучения программированию можно выделить несколько категорий учащихся. Во-первых, это ученики основной школы, курс информатики в которой преподается за счет часов вариативной части Базового учебного плана [1]. Министерством образования РФ рекомендован “Обязательный минимум содержания образования”, который имеет два уровня. Уровень А определяет содержание образования по информатике, обязательное для всех учащихся общеобразовательных школ. Согласно ему учащиеся должны освоить реализацию основных алгоритмических конструкций в одном из языков программирования, познакомиться с простыми типами данных и массивами (таблицами) как способом представления информации. То есть при составлении задачника для основной школы внимание должно уделяться преимущественно задачам, способствующим отработке применения основных алгоритмических конструкций с использованием простых типов данных и массивов. Такие задачи могут составлять первую часть задачника по началам программирования. Автоматическая проверка подобных задач возможна, однако ее одной в данном случае явно не достаточно. Обучение правильному применению тех или иных алгоритмических конструкций требует постоянного контроля со стороны преподавателя. Кроме того, задания этого уровня настолько просты, что “ручная” проверка, в том числе и листингов программ, не занимает много времени. Однако при организации занятий именно для таких категорий учащихся удобно

использовать систему автоматического тестирования теоретических знаний.

Уровень Б соответствует программе углубленного курса информатики, который преподается в основном в физико-математических школах. Помимо перечисленных выше знаний в области программирования, учащиеся таких школ должны уметь оперировать всеми основными типами данных одного из современных алгоритмических языков, включая объекты, использовать при разработке программ процедуры, функции и операции над объектами и разрабатывать программы методом последовательной детализации. В требованиях к результатам обучения на таком уровне говорится, что учащиеся должны уметь записывать на языке программирования типовые алгоритмы, такие, как: поиск минимального и максимального элемента в массиве, упорядочивание элементов массива, определение количества слов в тексте — и т.д. Данные требования фактически и определяют содержание задачника для такой категории учащихся. Характер и сложность этих задач таковы, что автоматическая их проверка может существенно повысить эффективность занятий по информатике.

В последнюю категорию можно выделить участников олимпиад по информатике. Задачи, предлагаемые на олимпиадах, охватывают различные разделы информатики и программирования. Тем не менее их темы, а также основные алгоритмы решения возможно формализовать. Помимо традиционных учебных тем, зачастую эти задачи используют идеи и приемы, применяемые в профессиональном программировании, например, идеи шифрования, принципы организации поиска в большом объеме информации, синтаксический и семантический разбор выражений, методы решения NP-полных задач и т.д. Большинство задач, предлагаемых на олимпиадах, после их окончания доступны вместе с набором тестов и программами для проверки правильности выходных данных программ участников на этих тестах. Поэтому включение подобных задач в компьютерный задачник существенно облегчено. В результате такой задачник может оказать неоценимую помощь при подготовке к новым соревнованиям.

Содержание задачника по началам программирования

При создании части компьютерного задачника, предназначенной для обучения основам программирования, можно использовать задачи по программированию, предлагаемые в [2, 3], а также в первой главе [4]. Перечислим основные классы и приведем примеры задач, которые должны присутствовать в данной части задачника.

Продолжение статьи читайте на с. 25

Обязательный минимум содержания образования по информатике:

и в нем нам хочется дойти до самой сути

А.Г. Гейн

Продолжение. Начало см. в № 24, 30/2001

Глава 4. Моделирование и формализация

§ 22. Исследование на компьютере информационных моделей из различных предметных областей

От формулировки данного пункта “Обязательного минимума...” по спине бежит холодок, а на голове начинают шевелиться волосы. Ведь речь идет не об исследовании реальных объектов, процессов или явлений с помощью информационных моделей, реализованных компьютерными средствами, а об исследовании самих моделей. А что же в них исследовать? И вообще, что значит “исследовать”?

К сожалению, тут и словарь С.И. Ожегова [8] не помогает. В нем сказано, что “Исследовать — 1. Подвергнуть научному изучению”¹, а “Изучить — 2. Научно исследовать”². Скажем так: исследовать — это значит обнаруживать свойства и вскрывать закономерности, присущие объектам, явлениям или процессам. Поскольку нам предлагается исследовать модели, значит, речь идет о свойствах моделей. Но, как мы видели в § 19, главное свойство модели — быть адекватной (или неадекватной) тому, что моделируется.

Итак, одно из возможных толкований данного пункта “Обязательного минимума...” — это компьютерное исследование информационных моделей на адекватность.

Но все-таки гложет сомнение: может быть, авторы “Обязательного минимума...” сказали не совсем то, что хотели сказать? Может быть, исследовать надо все-таки реальный мир с помощью компьютерных моделей? Не зря же на первое место в данном разделе вынесено “Модель как метод познания”!

Сомнение поддерживается еще и вот чем. Откроем учебник [6] на с. 206. Читаем: “ЭВМ — универсальная машина для обработки информации. Поэтому, если мы хотим про какую-то ситуацию что-то узнать (получить информацию), мы можем попытаться смоделировать эту ситуацию на ЭВМ и получить информацию не из анализа реальной ситуации, а из анализа ее информационной

модели” (курсив мой. — А. Г.). Анализ, исследование — почти синонимы. Прочитав в учебнике такой пассаж про анализ информационной модели с помощью ЭВМ, почему бы и в “Обязательный минимум...” не записать то, что записалось.

Рискнем предположить, что и эта наша догадка о смысле данного пункта верна. Тем самым в этом параграфе мы рассмотрим два варианта:

1. Исследование реальных объектов, процессов и явлений из разных предметных областей с помощью компьютерного моделирования.

2. Исследование информационной модели на адекватность с помощью компьютерного эксперимента.

Начнем по порядку, с первого варианта, и пусть первой предметной областью будет физика, и даже более узко — механическое движение. Вот подходящая задача (см. [6], с. 211):

“Парашютист прыгнул с самолета, летящего со скоростью 180 км/ч на высоте 1300 м, и раскрыл парашют на высоте 600 м. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости ($k \approx 0,004$). Составьте алгоритм, который определяет время падения парашютиста до момента открытия парашюта”.

С физической точки зрения в задаче речь идет о движении тела в поле силы земного тяготения в среде с сопротивлением. Модель этого процесса в удобном для компьютерного исследования виде мы и будем строить. А самой задаче (для удобства дальнейших ссылок) дадим имя “**Полет в среде с сопротивлением**”.

Чтобы построить нужную модель, мы должны не только определить, что существенно для конструируемой модели, но и те теоретические положения физики, которые позволят нам без проведения натурных экспериментов вскрыть зависимости между параметрами строящейся информационной модели. Еще раз обратим внимание, что всякая модель должна быть согласованной не только с практикой, но с существующей теорией, поэтому естественно считать, что теоретические положения той области знания, где идет построение модели,



¹ Второй смысл этого термина — осмотреть для выяснения, изучения чего-нибудь.

² Другие значения этого термина таковы: 1. Постичь учением, усвоить в процессе обучения. 3. Внимательно наблюдая, ознакомиться, понять.

выступают в роли предположений. Вот и здесь: будем считать, что выполнены законы механики, сформулированные Ньютоном. Среди них для нас особенно важным будет закон, гласящий, что сила, действующая на тело с постоянной массой, пропорциональна ускорению (второй закон Ньютона). Пригодится нам и третий его закон: силы действия и противодействия равны по величине, приложены к одной точке и направлены в противоположные стороны.

Что касается условия “Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости”, будем считать это экспериментально установленным фактом и тоже включим его в список исходных предположений. Мы уточним его, приняв, что сила сопротивления противоположна скорости движущегося тела. Будем также считать, что парашютист просто выпал из самолета, а не прыгнул куда-нибудь в сторону — тогда можно не учитывать собственную начальную скорость парашютиста (относительно самолета). И, наконец, для простоты предположим невероятное: пока парашютист падает, совсем не дует ветер. Последние два предположения обеспечивают нам возможность рассматривать движение парашютиста в одной плоскости³.

Из тех же экспериментов взялся, по-видимому, и коэффициент 0,004. Но он нам понадобится уже в численном эксперименте с моделью, а пока мы должны учесть, что одним из параметров, описывающих сопротивление среды, является коэффициент k .

Для построения модели нам придется сделать и “геометрическое” предположение: будем считать, что поверхность Земли плоская.

Важный принцип ньютоновской механики состоит в том, что всякое движение в (вертикальной) плоскости можно рассматривать как сумму двух независимых “одномерных” движений — горизонтального и вертикального. Выберем систему координат так, чтобы в момент прыжка парашютиста самолет располагался на оси ОУ и вектор его скорости был бы направлен в первый квадрант (см. рис. 37). Это значит, что отсчитывать время t мы начнем с момента прыжка парашютиста.

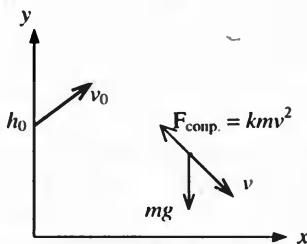


Рис. 37

³ Как все уже, наверно, поняли, ни один парашютист реально не падает так, как будет описано в этой модели. А летают так пули и снаряды. Они-то уж точно не могут “выпрыгнуть” из ствола куда-нибудь в сторону. Модель же движения, конечно, та же самая. Наверно, поэтому в учебнике [6], хотя в рассуждениях фигурирует парашютист с нераскрывшимся парашютом, на сопровождающей эти рассуждения картинке изображены два вояки, наблюдающие за полетом снаряда (см. с. 208).

Пусть теперь наш парашютист через некоторое время оказался в точке с координатами x и y . Результирующая сила F , определяющая движение парашютиста, равна векторной сумме сил сопротивления и тяжести (снова см. рис. 37). Сила сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}}$, как сказано в условии, равна $-k m d|\vec{v}| \vec{v}$, где через $|\vec{v}|$ обозначена длина вектора $\vec{v}$. Чтобы рассматривать движение парашютиста как сумму двух движений, мы должны рассмотреть проекции сил и скоростей на оси. Тогда $F_x = -k m d|\vec{v}| v_x$, а $F_y = -mg - k m d|\vec{v}| v_y$. Второй закон Ньютона дает нам систему соотношений

$$m a_x = -k m d|\vec{v}| v_x$$

$$m a_y = -mg - k m d|\vec{v}| v_y$$

Фактически уже мы построили математическую модель процесса. Перепишем ее в более удобном виде:

$$a_x = -k \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} v_x$$

$$a_y = -g - k \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} v_y$$

Высота $h(t)$, на которой находится парашютист в момент времени t , очевидно, совпадает с ординатой y ; так что нам надо научиться выражать изменение y со временем.

Ясно, чтобы процесс был определен однозначно, надо задать, на какой высоте в начальный момент времени находился самолет (а значит, и парашютист) и какова его скорость в момент прыжка. При этом скорость представляет собой вектор, т. е. задается двумя своими координатами, а не только величиной (как это сделано в условии задачи).

Как же теперь применить компьютер для исследования процесса с помощью данной модели? Вспомним снова § 19, где обсуждался тезис, что применимость модели определяется наличием средств, при помощи которых эта модель реализуема. Раз мы говорим о компьютерной реализации модели, то, следовательно, надо выбрать какую-либо компьютерную технологию и реализовать модель ее средствами.

Выбор компьютерной технологии неоднозначен. Можно, к примеру, взять пакет “Живая физика”, где построенная нами модель уже компьютерно реализована. Все, что требуется от пользователя, — задавать требуемые начальные данные и наблюдать на экране компьютера вычерчиваемую парашютистом траекторию.

Можно взять какой-либо математический пакет (например, МатКад), где имеются программы численного или аналитического решения систем дифференциальных уравнений. Чтобы воспользоваться соответствующей программой из такого пакета, надо сначала по ее запросам сообщить ей уравнения, а затем начальные данные. Дать аналитическое решение в общем случае для записанной выше системы уравнений такая программа, вероятнее всего, откажется, зато численное решение для различных начальных условий можно опять-таки наблюдать в виде графиков на мониторе.

Авторы учебника [6] в качестве компьютерной технологии предлагают использовать какой-либо язык программирования (точнее, школьный алгоритмический язык).

Но есть еще одна технология, позволяющая выполнить вычисления, — электронные таблицы. Чтобы не повторять учебник [6], мы воспользуемся именно этой технологией.

Численные методы расчетов на компьютере (как и алгоритмы) обладают свойством дискретности⁴. Поэтому построенную нами непрерывную модель мы должны заменить дискретной моделью, как говорят, провести дискретизацию непрерывной модели. Это означает, что процесс, непрерывно развертывающийся во времени, разбивается на отдельные стадии: каждая следующая стадия отстоит от предыдущей на небольшой промежуток времени, обозначаемый обычно через Δt ⁵. Естественно предполагать, что в течение этого промежутка времени состояние объектов, участвующих в процессе, остается постоянным, а затем скачком меняется на новое. В нашем случае состояние объекта (парашютиста) описывается координатами точки его местонахождения, векторами скорости и ускорения; именно они в течение интервала Δt остаются постоянными, а затем скачком меняются на соответствующую величину. Тогда мы получим следующие соотношения, показывающие, как меняются известные величины по истечении интервала времени Δt :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \cdot \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \cdot \Delta t$$

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - k \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} v_x(t) \cdot \Delta t$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - (g + k \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} v_y(t)) \cdot \Delta t$$

Ниже показано, как можно заполнить электронную таблицу для проведения вычислений по данным формулам (мы не имеем в виду конкретную версию электронной таблицы, поэтому в записи формул допускаем вольности; скажем, вместо слова “корень”, как это принято в Excel, мы оставили знак квадратного корня). В ячейки A1, B1, F4 и F5 заносятся начальные данные — координаты начального положения, величина начальной скорости и угол, который вектор начальной скорости составляет с осью абсцисс.

Итак, мы перестроили математическую модель в модель, к которой применимы компьютерные технологии.

Модель, реализованную в компьютере посредством подходящего программного обеспечения, называют компьютерной моделью.

Результаты расчета можно представить и графиками (см. рис. 38), для этого мы ввели еще столбец “Время”, а остальные столбцы сместили вправо.

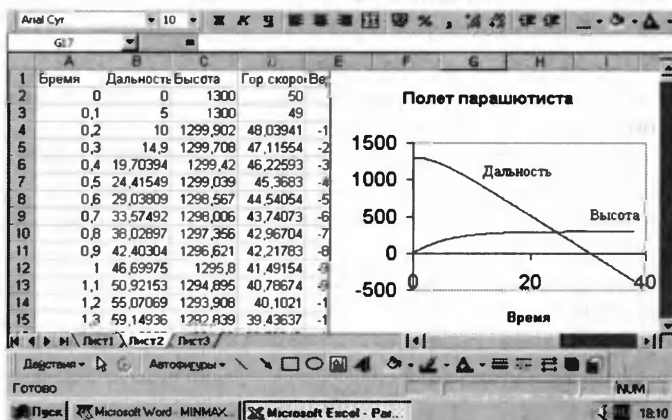


Рис. 38

А вот как выглядят графики изменения проекций скорости на оси координат (как функций от времени):

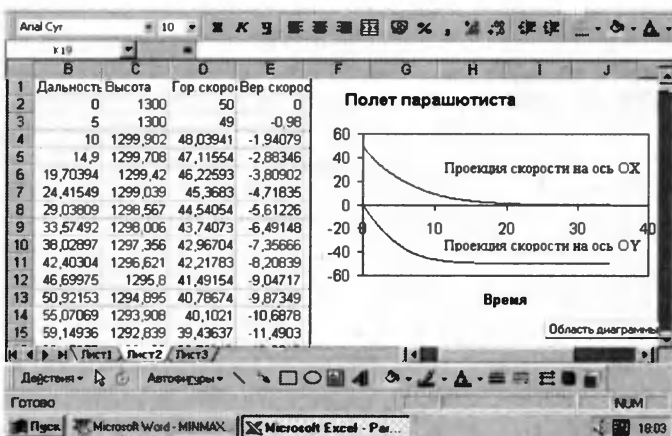


Рис. 39

	A	B	C	D	E	F
1	0	1300	F4 * Cos(F5)	F4 * Sin(F5)		0,1
2	A1 + C1 * F1	B1 + D1 * F1	C1 - E2 * C1 * F1	D1 - (F3 + E2 * D1) * F1	F2 * $\sqrt{C1^2 + D1^2}$	0,004
3	A2 + C2 * F1	B2 + D2 * F1	C2 - E3 * C2 * F1	D2 - (F3 + E2 * D2) * F1	F2 * $\sqrt{C2^2 + D2^2}$	9,8
4	A3 + C3 * F1	B3 + D3 * F1	C3 - E4 * C3 * F1	D3 - (F3 + E2 * D3) * F1	F2 * $\sqrt{C3^2 + D3^2}$	50
5	A4 + C4 * F1	B4 + D4 * F1	C4 - E5 * C4 * F1	D4 - (F3 + E2 * D4) * F1	F2 * $\sqrt{C4^2 + D4^2}$	0
	...	...	...	...	...	
200	A199 + C199 * F1	B199 + D199 * F1	C199 - E200 * C199 * F1	D199 - (F3 + E2 * D199) * F1	F2 * $\sqrt{C199^2 + D199^2}$	
	...	...	...	...	...	

⁴ В который раз мы вынуждены забежать вперед — об алгоритмах и их свойствах (в том числе и о дискретности) речь пойдет в § 23 (глава 5), об электронных таблицах — в главе 6. Это вовсе не следует воспринимать как претензии к авторам “Обязательного минимума...” в отношении неудачного расположения тем. Просто читатель должен понимать, что не возможен разумный учебник, который бы в точности следовал порядку изложения тем, принятому в “Обязательном минимуме...”.

⁵ В [6] приведено другое обозначение — dt ; так обозначают дифференциал переменной величины, а не ее изменение. Но в данном случае никакого греха нет, поскольку для независимой переменной (каким, конечно же, является время) дифференциал и изменение совпадают.

Видно, что проекция скорости на ось абсцисс быстро становится близкой к нулю. Более того, с некоторого момента наш парашютист начинает спускаться практически вертикально и никак ему не удастся пересечь отметку 290 м на оси абсцисс. И даже если на его пути не оказалась бы поверхность Земли, он продолжил бы свое почти вертикальное движение. Вот как выглядит это движение:

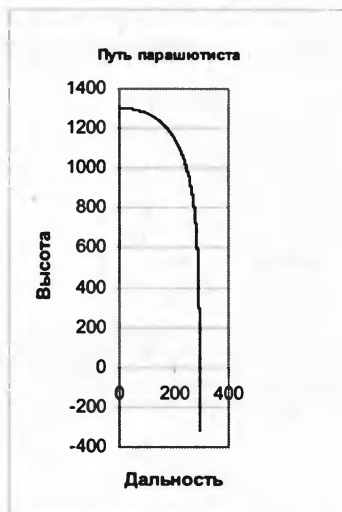


Рис. 40

Оно совсем не похоже на привычное движение по параболе, которое рисуют в любом учебнике физики, когда рассматривается движение тела под углом к горизонту.

Конечно, один компьютерный эксперимент еще ни в чем не убеждает, и скоропалительные выводы неуместны. Можно изменить начальную скорость, можно изменить угол наклона вектора скорости к линии горизонта, можно, наконец, изменить начальную точку движения. Например, будем считать, что мы стреляем из пушки под углом 45° , а начальная скорость снаряда — 600 м/с. На рис. 41 представлены результаты расчета.



Рис. 41

А на рис. 42 приведены результаты расчета стрельбы из той же пушки под углом 30° .

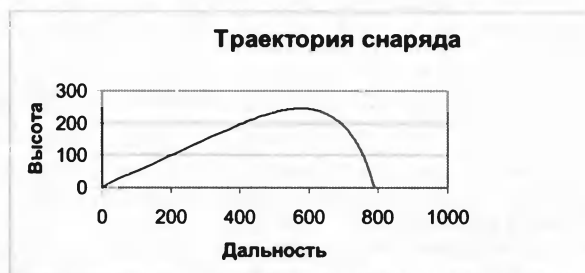


Рис. 42

Эксперименты можно продолжить (и школьники, как правило, с энтузиазмом это делают, меняя угол наклона или величину скорости). Выводы из этих экспериментов можно сделать такие.

1. Какой бы ни была начальная скорость и как бы она ни была направлена, через некоторое время движение под действием силы тяжести в среде с сопротивлением становится практически вертикальным и равномерным.

2. Скорость такого почти равномерного движения не зависит ни от начального положения, ни от величины начальной скорости, ни от ее направления.

3. Расстояние, проходимое телом в горизонтальном направлении, всегда ограничено. Его предельное значение зависит лишь от начальной скорости и угла наклона и не зависит от начальной высоты движущегося тела.

Конечно, интересно, чем определяется конечная скорость — ведь мы обнаружили, что она остается постоянной для данного тела. Догадаться, глядя лишь на получающееся числовое значение, довольно трудно. Но, поскольку мы не меняли пока еще два параметра модели — величину земного ускорения g и коэффициент сопротивления k , естественно предположить, что именно они "отвечают" за предельное значение скорости на излете. И действительно, оказывается, что скорость тела стремится к числу

$\sqrt{\frac{g}{k}}$. Как до этого додуматься, мы объясним позже, а проверить нетрудно: для этого надо в электронной таблице подсчитать это значение (например, в клетке F6) и сравнить со значением скорости, полученной в той же таблице. Совпадение оказывается впечатляющим.

Мы действительно смогли с помощью компьютерной модели исследовать некий физический процесс и даже сделали определенные выводы о том, как он протекает, чем отличается от похожего процесса, но для которого не учитывается сопротивление среды.

"Электронный маятник". Под этим именем мы будем рассматривать такую задачу:

"Имеются два положительных заряда — q_1 и q_2 , расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Между ними помещается еще один положительный заряд q . Как будет перемещаться этот заряд под действием кулоновских сил?"

Движение заряда определяется действием кулоновских сил и снова вторым законом Ньютона (см. рис. 43):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

где $\vec{F}_1$ — кулоновская сила, определенная зарядом q_1 ,
 $\vec{F}_2$ — кулоновская сила, определенная зарядом q_2 ,
 $\vec{F}$ — сила, определяющая движение заряда q ,
 т.е. $\vec{F} = m \vec{a}$.

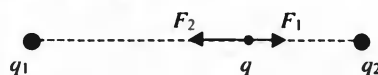


Рис. 43

В отличие от предыдущей задачи, движение здесь происходит вдоль прямой, проходящей через точки расположения зарядов q_1 и q_2 . Тем самым описывать движение заряда q мы можем с помощью одной перемен-

ной (обозначим ее x), определив на этой прямой начало отсчета O и положительное направление. Из физических соображений начало отсчета естественно выбрать в точке, где силы F_1 и F_2 уравновешивают друг друга. Это означает, что расстояния r_1 и r_2 от O до зарядов q_1 и q_2 соответственно удовлетворяют равенству

$$\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2} \quad (\text{см. рис. 44}).$$

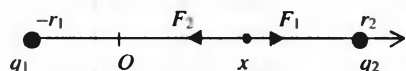


Рис. 44

Окончательно получаем:

$$ma = k \frac{qq_1}{(x+r_1)^2} - k \frac{qq_2}{(x-r_2)^2},$$

где m — масса заряда q ,

k — постоянный коэффициент.

Выразим из последнего уравнения a :

$$a = \frac{kq}{m} \left(\frac{q_1}{(x+r_1)^2} - \frac{q_2}{(x-r_2)^2} \right).$$

Построение математической модели закончено. Чтобы превратить ее в компьютерную модель, мы опять проведем процесс дискретизации, выбрав произвольно малый промежуток времени Δt . Тогда изменение скорости $v(t)$ и положения $x(t)$ заряда q описывается следующими соотношениями:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{kq}{m} \left(\frac{q_1}{(x+r_1)^2} - \frac{q_2}{(x-r_2)^2} \right) \Delta t,$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t.$$

Теперь можно заполнить соответствующим образом электронную таблицу: в ячейку B1 запишем начальное положение заряда q , в C1 запишем начальную скорость (у нас она равна 0), в D1 запишем значение Δt , в D2 — значение r_1 , в D3 — значение r_2 (его можно подсчитать по приведенной выше формуле, определяющей равновесие кулоновских сил), в D4 — значение q_1 , в D5 — значение q_2 , в D6 подсчитаем $\frac{kq}{m}$ (мы просто взяли это значение равным 1); остальное заполняется формулами, как показано ниже.

Результаты расчета и здесь удобно представить графиком (см. рис. 45):

	B	C	D
1	2		0, 01
2	B1 + C1 * D1	C1 + D6 * (D4 / (B1 + D2) ^ 2 - D5 / (B1 - D3) ^ 2) * D1	2
3	B2 + C2 * D1	C2 + D6 * (D4 / (B2 + D2) ^ 2 - D5 / (B2 - D3) ^ 2) * D1	6
4	B3 + C3 * D1	C3 + D6 * (D4 / (B3 + D2) ^ 2 - D5 / (B3 - D3) ^ 2) * D1	1
5	B4 + C4 * D1	C4 + D6 * (D4 / (B4 + D2) ^ 2 - D5 / (B4 - D3) ^ 2) * D1	9
...	...	...	...
200	B199 + C199 * D1	C199 + D6 * (D4 / (B199 + D2) ^ 2 - D5 / (B199 - D3) ^ 2) * D1	
...	...	...	

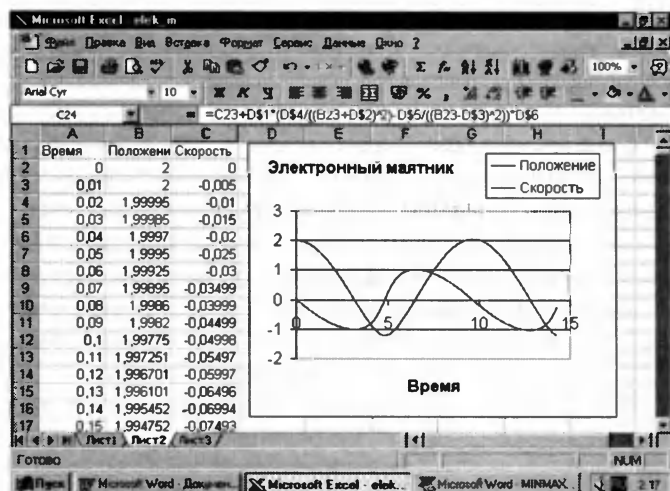


Рис. 45

Если в B1 ввести 0, то все ячейки таблицы распишутся 0. Физический смысл этого совершенно ясен: заряд помещен в точку равновесия кулоновских сил и потому двигаться никуда не будет.

Другой интересный частный случай — равенство зарядов q_1 и q_2 . В этом случае r_1 и r_2 тоже будут равны. Вот как выглядят результаты компьютерного моделирования в этом случае:



Рис. 46

Обратим внимание: заряд q проходит положение равновесия через 3,48 с, наибольшее отклонение влево — через 6,96 с (что равно $2 \cdot 3,48$), снова проходит через положение равновесия — через 10,41 с (что приблизительно $3 \cdot 3,48$), наибольшее отклонение вправо — через 13,85 с (это приблизительно $4 \cdot 3,48$). Затем процесс повторяется. Число 13,85 выступает значением периода колебаний электронного маятника. Налицо полная аналогия с обычным маятником: из положения наибольшего отклонения

за четверть периода приходим в положение равновесия, за следующую четверть периода приходим в противоположное положение наибольшего отклонения, еще через четверть периода снова приходим в положение равновесия и, наконец,

за последнюю четверть возвращаемся в исходное положение⁶.

Перейдем к рассмотрению моделей из других предметных областей, нежели физика⁷.

Следующую задачу мы рассмотрим из биологии (близкие задачи, приводящие к той же модели, разбираются в школьных учебниках [2] и [10]).

“В некотором ареале живет популяция живых организмов, не имеющая естественных врагов. Питание обеспечивается природными ресурсами ареала. Организмы популяции размножаются, так что масса организмов растет с течением времени. Как именно меняется эта масса?”

Намерение использовать компьютер для исследования изменения массы организмов популяции означает необходимость построения компьютерной модели. А построение любой модели начинается с выделения существенных факторов.

Конечно, факторов, влияющих на жизнь популяции, много. Это и климатические условия, и даже конкретная погода в то или иное время года — скажем, холодная зима или засушливое лето могут отрицательно сказаться на росте популяции. Появление или быстрый рост вида животных, имеющих ту же кормовую базу, что и организмы рассматриваемой популяции, тоже не будет способствовать ее процветанию. Хорошо еще, что по условию на них никто не охотится.

Короче говоря, в принципе нельзя учесть все существенные факторы, влияющие на жизнь популяции. Поэтому естественно рассмотреть воздействие окружающей среды на численность популяции как “черный ящик”. У него один вход — численность популяции в некотором году, и один выход — ее численность в следующем году. Если обозначить численность популяции по истечении n лет через $M(n)$, то схематично данный “черный ящик” можно изобразить так:

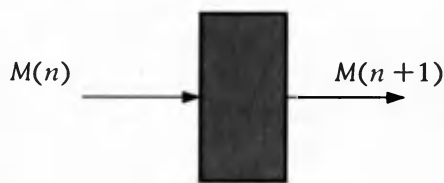


Рис. 47

⁶ На самом деле аналогия не такая полная: различие проявляется, например, в том, что для обычного маятника период колебаний увеличивается с ростом амплитуды, а для электронного маятника период колебаний с ростом амплитуды уменьшается. Указанную закономерность для электронного маятника легко обнаружить в компьютерном эксперименте с данной моделью: амплитуда — это величина начального отклонения от положения равновесия; она занесена в ячейку A1. Движение обычного маятника описывается уравнением, приведенным в § 19, его тоже можно смоделировать на компьютере похожим образом и обнаружить объявленную закономерность роста периода колебаний с ростом амплитуды.

⁷ Это вовсе не означает, что в физике нет других процессов, интересных с точки зрения их компьютерного моделирования. Интересная имитационная компьютерная модель радиоактивного распада обсуждается в статье В.М. Нечаева (“Информатика”, № 47/99), однако даже краткое описание ее реализации потребовало бы слишком много места, поэтому мы просто отсылаем читателя к этой статье.

Разгадать этот “черный ящик” мы, конечно, не можем — на то он и черный. Но естественно предположить, что прирост числа особей популяции за единицу времени пропорционален уже имеющемуся количеству. Такое предположение согласуется с обычными представлениями о размножении: чем больше живых организмов, тем больше у них потомков. А окружающая среда (т.е. наш “черный ящик”) выступает как регулятор прироста массы популяции. Во многих случаях удобно говорить именно о массе, а не о численности популяции. Дальше именно так мы и будем делать.

Высказанные предположения показывают, что для нашей модели существенна следующая информация: начальная масса (обозначим ее $M(0)$) и коэффициент прироста за 1 год (обозначим его k).

Пусть по истечении n лет масса достигла, как мы договорились, величины $M(n)$. Тогда ее прирост за 1 год составит $M(n+1) - M(n)$.

Значит, высказанные нами предположения можно записать равенством

$$M(n+1) - M(n) = kM(n).$$

Преобразуя это равенство, получаем

$$M(n+1) = M(n) + kM(n)$$

или

$$M(n+1) = (1+k)M(n).$$

По этой формуле, зная начальную массу $M(0)$ и коэффициент прироста k , можно сначала найти $M(1)$, т.е. массу, которая будет через год, затем найти $M(2)$ (массу через два года), затем $M(3)$ и т.д.

В последовательности $M(n)$ без труда распознается геометрическая прогрессия. Обнаруженную закономерность можно сформулировать так: если действие окружающей среды сказывается лишь на скорости прироста, то живые организмы размножаются в геометрической прогрессии. И совершенно неважно, идет ли речь о бактериях или китах, о водорослях или гигантских секвойях. Построена модель некоторого природного процесса, и при этом не играет роли, какие именно живые организмы участвуют в этом процессе. Построенную модель называют моделью **неограниченного роста**.

Для компьютерного эксперимента электронную таблицу можно заполнить так: в A1 помещаем значение $M(0)$, в B1 — значение k , остальные клетки заполнены так, как показано ниже.

	A	B
1		0, 01
2	A1 * B2	1 + B1
3	A2 * B2	
4	A3 * B2	
5	A4 * B2	
	...	
200	A199 * B2	
	...	

Если принять начальную массу за 1 (например, 1 кг), то даже при данном на первый взгляд весьма малом коэффициенте размножения через 100 лет она станет

равной 11 389, а через 200 лет — $\approx 1,57 \cdot 10^8$. Через 600 лет масса возрастет до $5,66 \cdot 10^{24}$, а на следующий год она станет $6,23 \cdot 10^{24}$; так что если сначала был 1 кг, то через 601 год масса популяции согласно этой модели превысит массу земного шара — $5,976 \cdot 10^{24}$ кг.

Конечно, ни при каких, даже самых благоприятных, условиях масса популяции не может превысить массу планеты — ведь это нарушало бы фундаментальный закон сохранения вещества. Модель неограниченного роста, которую мы построили и изучили, оказалась пригодной, как и следовало ожидать, лишь пока выполнено главное предположение — действие всех факторов выступает ограничителем только скорости прироста массы. Видимо, в нашем “черном ящике”, описывающем действие природных факторов, надо что-то подправить.

Поступим так. По-прежнему не вдаваясь в подробности, как именно факторы окружающей среды влияют на жизнь организмов (ящик-то все равно остается черным!), выдвинем предположение, что имеется некоторое предельное значение массы популяции, проживающей на той или иной территории. (Так, ученые показали, что запас массы растений не может превосходить 20 т на гектар в полярной зоне, 350 т на гектар в лесной зоне, 440 т на гектар в тропиках. А на всей Земле масса растений не может превысить $5 \cdot 10^{12}$ т. Для животных эти показатели примерно в 10 раз меньше.)

И еще одно наше предположение будет таким: чем ближе масса популяции к своей максимально возможной, тем меньшим становится коэффициент прироста⁸ k . Иными словами, коэффициент k не является неизменной величиной, а зависит от разности $L - M(n)$, где L — предельное значение массы популяции на данной территории. На языке “черных ящиков” это означает, что состояние “черного ящика” зависит от значения на его входе. Тем самым для нашего “черного ящика” мы обнаруживаем наличие обратной связи (см. § 4):

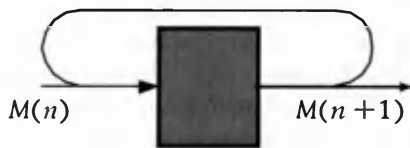


Рис. 48

Самая простая функция, известная, конечно, любому школьнику, — это прямая пропорциональность. Будем поэтому считать, что коэффициент прироста меняется по формуле:

$$k(n) = a(L - M(n))$$

для $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Подводя итог проделанной нами работе по уточнению модели, опишем получившуюся модель роста массы популяции организмов. Предположения:

- прирост массы живых организмов за единицу времени пропорционален уже имеющейся массе;
- существует некоторое предельное значение массы популяции;
- коэффициент прироста массы за единицу времени пропорционален разности между максимально возможным значением массы и массой, имеющейся к данному моменту времени.

Параметры модели:

- начальная масса популяции $M(0)$;
- предельное значение массы популяции L ;
- коэффициент пропорциональности a в формуле для коэффициента прироста;
- время n .

Связь между параметрами модели задается соотношением:

$$M(n+1) = M(n) + aM(n)(L - M(n)),$$

где через $M(n)$ по-прежнему обозначена масса популяции по истечении n лет.

Эту модель принято называть **моделью ограниченного роста**.

Подготовим электронную таблицу для проведения компьютерного эксперимента с данной моделью. Естественно возникает вопрос, где взять значения для коэффициента a . Из формулы $k(n) = a(L - M(n))$ видно, что для нахождения коэффициента a достаточно разделить $k(0)$ на $L - M(0)$.

Число $k(0)$ — это коэффициент прироста в самом начале процесса, и потому его нужно взять равным тому самому числу k , которое фигурирует в рассмотренной выше модели неограниченного роста. Кроме того, $M(0)$ должно быть значительно меньше L , чтобы опять-таки пользоваться коэффициентом прироста из модели неограниченного роста. Поэтому заносить в таблицу в качестве исходного данного можно по-прежнему k (что и сделано в ячейке C1), а коэффициент a вычислять (например, в ячейке C3) по соответствующей формуле:

$$a = \frac{k}{L}.$$

Кроме того, в ячейку C2 занесем значение L . Остальные ячейки заполнены так, как показано ниже.

	А	В	С
1	Год	Масса	0,1
2	0	1	1000
3	A2 + 1	B2 * (1 + C3 * (C2 - B2))	C1 / C2
4	A3 + 1	B3 * (1 + C3 * (C2 - B3))	
5	A4 + 1	B4 * (1 + C3 * (C2 - B4))	
	...	...	
200	A199 + 1	B199 * (1 + C3 * (C2 - B199))	
	...	...	

Приведем результаты расчета и график изменения массы популяции в зависимости от времени:

⁸ При обсуждении данной модели со школьниками для обоснования такого предположения можно сослаться на их собственные наблюдения (на пришкольном участке, в саду): вначале растения быстро набирают массу, затем их рост становится все медленнее.

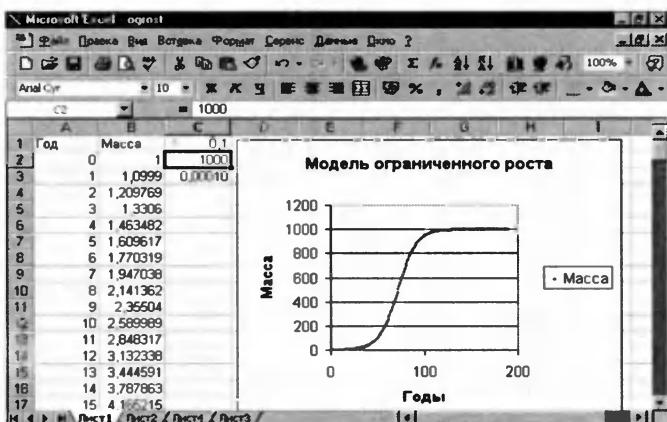


Рис. 49

Меняя начальное значение массы, школьники убеждаются, что популяции никогда не удастся перейти предельное значение L . Более того, если начальное значение было больше, чем L , то с течением времени значение массы все равно стремится к L (см. рис. 50).

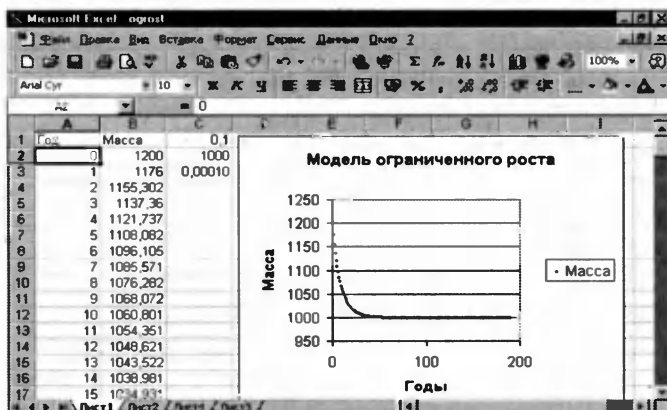


Рис. 50

Однако столь низкий коэффициент прироста нельзя признать характерным для всех живых организмов. Что будет происходить с популяцией, если коэффициент достаточно высок? На рис. 51 приведены результаты для $k = 2,5$. Отчетливо наблюдается четырехлетний цикл, причем через год имеется высокая численность, чередующаяся на уровнях 1225—1160, а через год — низкая численность, чередующаяся на уровнях 700—535. Не такой ли картиной объясняется, почему чередуются годы с высоким уровнем заболеваемости гриппом и низким? Ведь иммунитет от гриппа сохраняется очень недолгое время.

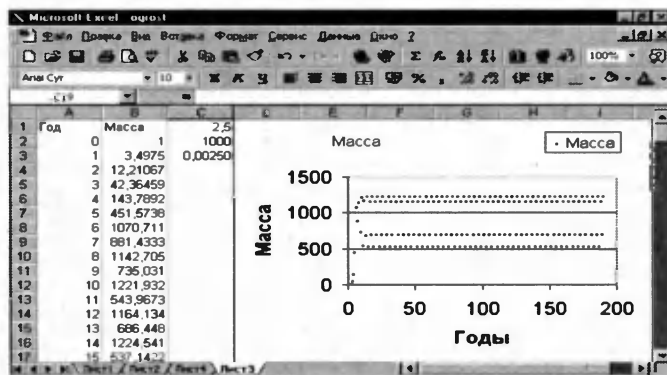


Рис. 51

А вот такая картина получается, если $k = 2,7$ (см. рис. 52). Глядя на нее, кажется, что вообще нет никаких закономерностей в численности популяции. Если биолог, наблюдая за некоторой популяцией, экспериментально получит подобную картину, то ему и догадаться не так-то просто, что это все та же модель ограниченного роста.

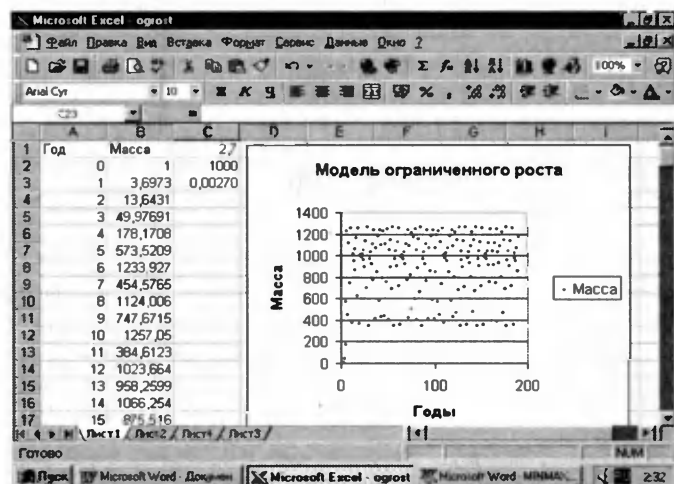


Рис. 52

На основе этой модели можно рассматривать различные эколого-экономические задачи. Можно считать, что данная модель описывает, например, рост леса на территории какого-либо леспромхоза или массу рыбы в каком-то водоеме, где планируется ее отлов, и т.п.

Пусть речь идет о рыбоводческом хозяйстве. Какой должна быть установлена квота ежегодно отлавливаемой рыбы, чтобы это хозяйство могло работать достаточно долго?

Обозначим искомую квоту буквой R . С точки зрения построенной нами модели это означает, что появилось еще одно воздействие на наш "черный ящик".

В компьютерной модели, реализованной посредством электронной таблицы, для значения R отведем ячейку C4. Ясно также, что коэффициент k ежегодного прироста рыбной массы не 0,1, а по крайней мере 2—3. Пусть $k = 2,5$. Остается еще решить, с какого года после начала рыбоводческой деятельности начинать отлов. Допустим, что по истечении первого года. Тогда таблица заполнится так (число, стоящее в B1, пусть означает, что в водоем запущена 1 т рыбы, предельное значение оставим 1000 т; разумеется, все эти цифры условны, они позволяют проследить ход процесса в целом):

	А	В	С
1	Год	Масса	2,5
2	0	1	1000
3	$A2 + 1$	$B2 * (1 + C3 * (C2 - B2)) - R$	$C1 / C2$
4	$A3 + 1$	$B3 * (1 + C3 * (C2 - B3)) - R$	
5	$A4 + 1$	$B4 * (1 + C3 * (C2 - B4)) - R$	
	...	...	
200	$A199 + 1$	$B199 * (1 + C3 * (C2 - B199)) - R$	
	...	...	

Беря для R последовательно значения 2; 2,3; 2,4; 2,45; 2,49, мы будем наблюдать примерно одну и ту же картину: численность популяции стабилизируется на том или ином уровне (см. рис. 53). Но если R превысит 2,5, то природа с таким расхищением справиться уже не может — вся популяция погибнет.

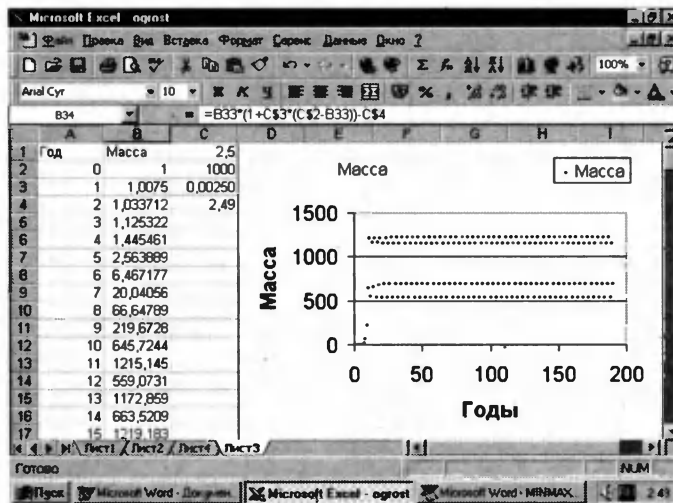


Рис. 53

Важный вывод, который должны сделать учащиеся из компьютерных экспериментов с данной моделью, состоит в следующем.

1. Динамическая система с обратной связью обладает свойством *саморегуляции*: она восстанавливает стабильное состояние после внешнего вмешательства, выводящего ее из этого состояния.

2. Существует определенный порог для величины внешнего воздействия на саморегулирующуюся систему; превышение этого порога приводит к разрушению системы.

Эти выводы можно сформулировать и с предметной (в данном случае — экологической) окраской: экологические системы обладают механизмом саморегуляции, позволяющим поддерживать гомеостаз такой системы, однако воздействия человека на экологическую систему не должны превышать порогового уровня, за пределами которого происходит необратимое ее разрушение. Экологическая грамотность состоит не в призывах отказаться от всякого вредного воздействия человека на природу (сегодня, увы, человечество не способно прокормить себя без использования удобрений, не может обойтись без промышленности, обеспечивающей его одеждой, жильем и т.п.), а в том, чтобы ограничить это воздействие допороговым уровнем в каждой конкретной экологической ситуации.

А вот и экономическая постановка той же задачи. Разглядывая результаты, представленные на рис. 53, можно задаться вопросом: нельзя ли из года в год увеличивать добычу природного ресурса (мы вели речь про отлов рыбы), с тем чтобы получать все большую прибыль? Ясно, что нельзя забирать больше, чем выявленный минимальный уровень популяции. Но можно, например, попытаться забирать половину имеющейся массы или $2/3$. Можно и здесь попытаться установить наибольшую вели-

чину той доли популяции, которую можно ежегодно забирать (например, 75% забирать нельзя). Правда, экономически это оказывается невыгодно, а выгоднее брать только половину имеющейся массы. Иными словами, здесь большое поле для обсуждения со школьниками.

Переходя к задачам, связанным с экономикой, мы обсудим задачу, которая приведена в [1]:

“Несколько человек решили организовать видеокафе на 6 столиков по 4 места за каждым. В рабочие дни предполагается проводить по 3 видеосеанса, а в выходные — по 5. С каждого посетителя будет взиматься входная плата за сеанс видеофильма и ужин (всем посетителям будет предлагаться набор блюд одной и той же суммарной стоимости). Требуется установить входную плату так, чтобы выручка была наибольшей”.

Конечно, в этой задаче уже многое сознательно упрощено: единая для всех посетителей стоимость посещения, жесткая ограниченность по времени пребывания каждого посетителя (ровно один видеосеанс) и т.п. Тем не менее, как мы увидим далее, даже при таких упрощениях можно обнаруживать некоторые общие закономерности.

Каждому школьнику ясно, что число посещений зависит от цены за посещение: если цена низкая, то желающих посетить будет много и может даже образоваться очередь, если же цена будет слишком высокой, то кафе будет пустовать (и, значит, приносить низкий доход). Однако в отличие от вышерассмотренных задач здесь нет никакой теории, которая бы прямо связывала цену посещения с количеством посещающих. Если за x обозначить цену, а через $f(x)$ — число посетителей как функцию от цены, то можно лишь схематично изобразить график этой функции (см. рис. 54).

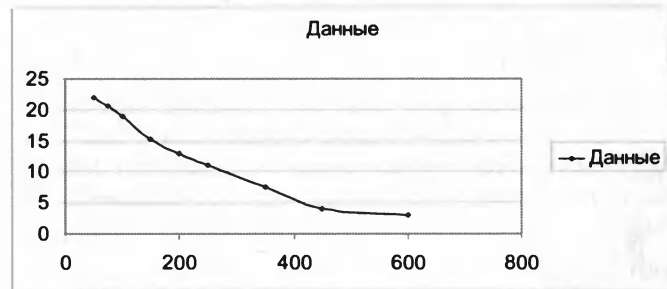


Рис. 54

Ясно, что это функция не линейная, а среди других функций наиболее знакомой школьникам является квадратичная⁹. Так что естественно попытаться представить эту функцию квадратным трехчленом от x . Коэффициенты этого трехчлена неизвестны, поэтому обозначим их буквами a , b и c , т.е. $f(x) \approx ax^2 - bx + c$. При этом из вида графика ясно, что все три числа a , b и c положительны; знак “—” перед b показывает, что вершина параболы, представляющей график этой функции, располагается в правой полуплоскости.

⁹ На самом деле имеются более глубокие причины для выбора именно квадратичной функции в качестве искомой — в математике доказывается, что любую функцию можно приблизить с нужной степенью точности подходящим многочленом. Конечно, он может быть довольно высокой степени, но вначале естественно ограничиться второй степенью.

Значения двух других коэффициентов из теоретических соображений получить не удастся, требуется эксперимент, чтобы найти эти значения. Такой эксперимент обычно выглядит так. Владелец кафе устанавливает некоторую цену и некоторое время (скажем, в течение рабочей недели или, наоборот, в выходные дни — ясно, что посещаемость может оказаться разной) изучает посещаемость кафе при данной цене. Через некоторое время цена меняется (увеличивается или уменьшается) и снова фиксируется посещаемость. И так далее.

Конечно, реально школьники никакое кафе открывать не будут, им можно предложить уже готовые результаты такого эксперимента либо в виде графика, либо в табличном виде. Пусть, для примера, это будет табл. 14:

Таблица 14

Цена, x	50	75	100	150	200	250	350	450	600
Посещаемость, $f(x)$	22	20,7	19	15,3	13	11	7,5	4	3

Теперь надо выбрать критерий, по которому мы будем оценивать, годится ли квадратичная функция с подобранными нами коэффициентами a , b и c на роль $f(x)$. Этот критерий можно выбирать по-разному. Мы укажем некоторые наиболее часто применяемые варианты. Однако в каждом из них так или иначе фигурируют отклонения вычисляемых значений трехчлена $ax^2 - bx + c$ для данного значения x от известного значения $f(x)$ для того же самого x . Поэтому в нашей таблице добавим еще одну строку для записи туда этих отклонений.

Таблица 15

Цена, x	50	75	100	150	200	250	350	450	600
Посещаемость, $f(x)$	22	21	19	15	13	11	7	4	3
$f(x) - (ax^2 - bx + c)$									

Первый из рассматриваемых нами критериев носит название метода наименьших квадратов. Он состоит в следующем. Каждое из вычисленных отклонений возводится в квадрат и полученные числа суммируются. В качестве a , b и c выбираются такие их значения, при которых значение указанной суммы будет минимальным. Иными словами, рассматривается функция

$F(a, b, c) = (f(x_1) - (ax_1^2 - bx_1 + c))^2 + (f(x_2) - (ax_2^2 - bx_2 + c))^2 + \dots + (f(x_9) - (ax_9^2 - bx_9 + c))^2$ и для этой функции решается задача поиска ее наименьшего значения¹⁰. То, что в выражении для функции F записано

¹⁰ Мы воздержимся от изложения и обоснования метода наименьших квадратов во всей его общности. Учителя, работавшие по учебнику [9], возможно, помнят упоминание об этом методе как в самом учебнике (с. 69–71), так и в книге для учителя [3] (см. с. 147–149). Но там без какого бы то ни было объяснения приводится только расчетная формула для определения углового коэффициента k , когда искомая функция $f(x)$ принимается приближенно равной прямо пропорциональной зависимости kx . Однако отсутствие вывода предлагаемой формулы (весьма несложного и опирающегося только на свойства квадратичной функции, изучаемые школьниками в 9-м классе) — не самый большой недостаток двух указанных книг. Принципиально неверной является рекомендация (см. [3], с. 149) сделать в конце урока вывод, что «метод наименьших квадратов является универсальным вычислительным методом определения линейной зависимости между двумя переменными величинами на основании экспериментально полученных данных». Во-первых, этот метод вовсе не универсальный (как мы увидим чуть позже), во-вторых, применяют его далеко не только при нахождении линейной зависимости.

только 9 слагаемых, обусловлено, как всем ясно, только тем, что у нас имеется лишь 9 значений переменной x и связанной с ней переменной $f(x)$. Ясно также, что F действительно является функцией аргументов a , b и c и только их.

Чтобы получить формулы для вычисления a , b и c , преобразуем выражение для F , раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые, содержащие указанные величины:

$$F(a, b, c) = a^2 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^4 \right) - 2ab \left(\sum_{i=1}^9 x_i^3 \right) + 2ac \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) + b^2 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) - 2bc \left(\sum_{i=1}^9 x_i \right) + 9c^2 - 2a \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 f(x_i) \right) + 2b \left(\sum_{i=1}^9 x_i f(x_i) \right) - 2c \left(\sum_{i=1}^9 f(x_i) \right) + \sum_{i=1}^9 (f(x_i))^2$$

Пусть набор чисел a_0 , b_0 , c_0 доставляет минимум функции $F(a, b, c)$. Тогда ясно, что точка a_0 является точкой минимума функции $F(a, b_0, c_0)$ как функции одной переменной a . Но эта функция представляет собой квадратичную функцию вида $Aa^2 + 2Ba + C$, где $A = \sum_{i=1}^9 x_i^4 > 0$,

$$B = -b_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^3 \right) + c_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) - \sum_{i=1}^9 x_i^2 f(x_i),$$

$$C = b_0^2 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) - 2b_0 c_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i \right) + 9c_0^2 + 2b_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i f(x_i) \right) - 2c_0 \left(\sum_{i=1}^9 f(x_i) \right) + \sum_{i=1}^9 (f(x_i))^2.$$

Напомним, что минимум квадратичной функции достигается при том значении аргумента, которое служит абсциссой вершины параболы. Иными словами,

$$a_0 = -\frac{B}{A}. \text{ Перепишем его в виде } Aa_0 + B = 0.$$

Аналогично можно рассмотреть функцию $F(a_0, b, c_0)$, которая снова является квадратичной функцией вида

$$A_1 b^2 + 2B_1 b + C_1, \text{ где } A_1 = \sum_{i=1}^9 x_i^2 > 0;$$

$$B_1 = -a_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^3 \right) - c_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i \right) + \sum_{i=1}^9 x_i f(x_i);$$

$$C_1 = a_0^2 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^4 \right) + 2a_0 c_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) + 9c_0^2 + 2a_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 f(x_i) \right) - 2c_0 \left(\sum_{i=1}^9 f(x_i) \right) + \sum_{i=1}^9 (f(x_i))^2.$$

Значит, выполняется равенство $A_1 b_0 + B_1 = 0$.

Наконец, рассматривая функцию $F(a_0, b_0, c)$, получаем соотношение $A_2 c_0 + B_2 = 0$,

где $A_2 = 9$;

$$B_2 = a_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) - b_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i \right) - \sum_{i=1}^9 f(x_i).$$

Перепишем полученные условия в виде системы уравнений для a_0 , b_0 и c_0 :

$$\begin{aligned} a_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^4 \right) - b_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^3 \right) + c_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) &= \\ = \sum_{i=1}^9 x_i^2 f(x_i) - a_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^3 \right) + b_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) - \\ - c_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i \right) &= - \sum_{i=1}^9 x_i f(x_i) \\ a_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) - b_0 \left(\sum_{i=1}^9 x_i \right) + 9c_0 &= \sum_{i=1}^9 f(x_i). \end{aligned}$$

Эта система всегда имеет единственное решение¹¹. После того как оно найдено, мы получаем выражение $a_0 x^2 - b_0 x + c_0$, приближенно описывающее искомую функцию $f(x)$.

Найдем значения a_0 , b_0 и c_0 для данных, приведенных в табл. 14. Вот какая получается система для определения этих значений:

$$\begin{cases} 191768890625a_0 - 378546875b_0 + 828125c_0 = 4655625 \\ -378546875a_0 + 828125b_0 - 2225c_0 = -18225 \\ 828125a_0 - 2225b_0 + 9c_0 = 115 \end{cases}$$

Решение этой системы дает следующие значения:

$$a_0 \approx 0,00006191; b_0 \approx 0,07514; c_0 \approx 25,7126$$

На рис. 55 приведены графики таблично заданной функции $f(x)$ и функции $a_0 x^2 - b_0 x + c_0$ по вычисленным для нее коэффициентам.

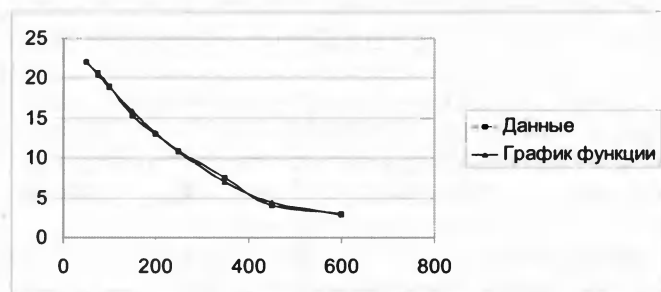


Рис. 55

Теперь можно заполнить и третью строку в табл. 15 (мы сохранили лишь два знака после запятой) — см. табл. 15а.

Преимущество метода наименьших квадратов перед другими методами состоит уже в том, что имеется простой вычислительный алгоритм для нахождения коэффициентов функции, приближающей таблично заданную функцию, — нужно решить легко составляемую систему уравнений. Есть и другая причина того, что метод наименьших квадратов активно используется при обработке экспериментальных данных. Она состоит в том, что ошибки измерений, как правило, подчинены нормальному закону распределения. Можно математически доказать, что в этом случае именно метод наименьших квадратов дает ту теоретическую кривую, которая должна была бы получиться, если бы измерения производились абсолютно точно¹².

Таблица 15а

Цена, x	50	75	100	150	200	250	350	450	600
Посещаемость, $f(x)$	22	21	19	15	13	11	7	4	3
$f(x) - (a_0 x^2 - b_0 x + c_0)$	-0,11	0,27	0,18	-0,53	-0,16	0,20	0,50	-0,44	0,08

Другой критерий, определяющий то, насколько хорошо та или иная функция $g(x)$, заданная формулой, приближает таблично заданную функцию $f(x)$, состоит в том, что мы измеряем абсолютную величину отклонения $f(x) - g(x)$ для каждого заданного нам значения аргумента и подбираем коэффициенты так, чтобы наибольшее из этих отклонений было как можно меньше. Получающееся таким способом приближение называется **равномерным**. Обычно равномерное приближение применяется тогда, когда требуется построить функцию заданного вида, приближающую другую функцию, заданную тем или иным способом, но неудобным для исследования. Как правило, здесь не идет речь об измерении какой-то одной физической величины, как это было для метода наименьших квадратов.

Обратившись к третьей строке табл. 15а, мы видим, что при найденных значениях a_0 , b_0 и c_0 максимальное отклонение составляет 0,53. Это, конечно, очень неплохой результат, но мы тем не менее попытаемся его улучшить. Для этого снова воспользуемся электронной таблицей, заполнив ее следующим образом.

	А	В	С	Д
1	Цена	Посещаемость	Отклонение	a_0
2	50	22	$ABS((D1 * A2 - D2) * A2 + D3 - B2)$	b_0
3	75	20,7	$ABS((D1 * A3 - D2) * A3 + D3 - B3)$	c_0
4	100	19	$ABS((D1 * A4 - D2) * A4 + D3 - B4)$	Макс (C2:C10)
5	150	15,3	$ABS((D1 * A5 - D2) * A5 + D3 - B5)$	
	...	...	...	...
10	600	3	$ABS((D1 * A10 - D2) * A10 + D3 - B10)$	

¹¹ Это утверждение школьники действительно обосновать не могут — они не располагают нужными знаниями из теории линейных уравнений. Но уже в конце 1-го курса вузовской математики оно довольно легко доказывается.

¹² Содержательно это можно пояснить так. При измерении той или иной физической величины, например, сопротивления проводника или модуля упругости пружины, в силу воздействия случайных факторов возможны отклонения от истинного значения, причем, возможно, и весьма значительные. Поэтому нет никаких причин добиваться, чтобы все экспериментальные данные были одинаково близки к теоретическому. Минимизация суммарного (в том или ином смысле), а не каждого отдельно взятого отклонения лучше отвечает описанной ситуации.

В качестве исходных значений a_0 , b_0 и c_0 мы возьмем те, которые получились по методу наименьших квадратов. А теперь попробуем их поменять так, чтобы максимальное из отклонений стало как можно меньше (для контроля за величиной этого максимального отклонения и служит ячейка D4)¹³. Результаты расчета показаны на рис. 56.

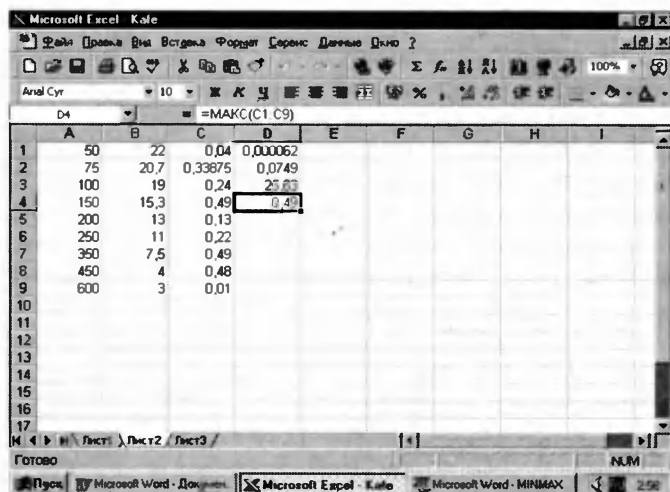


Рис. 56

Как видно, нам удалось пусть на немного, но все же улучшить результат: отклонение снизилось до 0,49.

Теперь, когда построена функция, описывающая зависимость посещаемости от цены, можно заняться и изучением дохода: при цене x выручка составит $xf(x)$. Тем самым нам требуется исследовать на максимум функцию $x(a_0x^2 - b_0x + c_0)$. Школьники старших классов умеют исследовать функцию на максимум и минимум с помощью производной. Для учащихся более младших классов можно предложить построить график указанной функции с помощью электронной таблицы и по нему определить значение максимума (см. рис. 57).

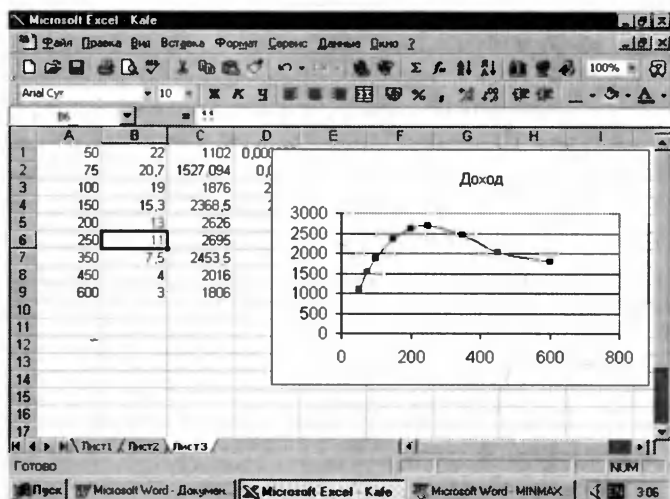


Рис. 57

¹³ В отличие от метода наименьших квадратов не существует единого алгоритма для решения задачи о построении наилучшего равномерного приближения. О том, как эвристически подбирать коэффициенты с помощью электронной таблицы, будет рассказываться в разделе "Электронные таблицы" главы 6 "Информационные технологии".

Получился совершенно удивительный на первый взгляд результат: выручка (а значит, и прибыль) максимальна, когда цена установлена такая, что лишь половина мест бывает занята. Конечно, если призадуматься, то чего-то подобного можно было ожидать — если кафе постоянно переполнено, значит, цена слишком низкая; если же оно пустует, то цена слишком высокая. Но каким должен быть оптимум — невозможно определить такими умозаключениями. Построенная нами модель показывает, что цена оптимальна, когда востребуется примерно половина предлагаемой услуги. И это относится не только к видеокфе, но и к билетам на поезда и самолеты, ассортименту товаров в магазине (не должно быть дефицита, но и товар не должен залеживаться — примерно половина его ежедневно (или еженедельно, или ежемесячно — в зависимости от выбранной для контроля единицы времени) должна быть реализуемой). В развитых капиталистических странах этот закон давно осознан и успешно применяется, а мы зачастую все еще колеблемся между дешевым дефицитом и дорогим неликвидом.

Рассмотрим еще одну модель, которая хотя и не является экономической, но имеет к экономике прямое отношение. Речь пойдет о моделировании систем массового обслуживания. Представление о системах массового обслуживания дают следующие примеры.

На телефонную станцию поступают телефонные звонки. Для их обслуживания требуются свободные каналы связи. Сколько таких каналов должно быть, чтобы не возникало простоев оборудования и слишком больших очередей абонентов, ожидающих связи?

На станцию "Скорой помощи" поступают вызовы от населения. Сколько врачебных бригад должно дежурить в то или иное время суток, чтобы бесперебойно оказывать помощь и при этом не было слишком много бригад без дела?

В магазине самообслуживания покупатели рассчитываются через кассы на выходе. Сколько надо установить кассовых аппаратов и каков должен быть режим работы кассиров, чтобы не создавалось слишком длинных очередей и не простаивали без дела кассиры?

Во всех этих примерах есть две черты, их объединяющие:

1. Требуется обрабатывать некоторые объекты, поступающие постоянно, но через случайные промежутки времени.
2. Время на обработку каждого объекта тоже случайная величина.

Системы с такими особенностями и называют **системами массового обслуживания**.

Для моделирования систем массового обслуживания надо знать характер тех "случайностей", которые описаны в пунктах 1 и 2. Для этого их статистически изучают, проводя соответствующие наблюдения и измерения (примерно так же, как с посещаемостью кафе в задаче, разобранный выше). Поэтому для разных систем массового обслуживания получаются, вообще говоря, разные модели, их описывающие. Мы разберем самую простую — модель кассового обслуживания в магазине.

Конечно, в разное время суток интенсивность посещения магазина покупателями различна. Но мы выберем некоторый интервал времени, например, с 6 до 7 часов вечера, когда интенсивность не сильно меняется. В это время можно считать, что количество покупателей, приходящих в магазин в течение минуты, — это равномерно распределенная случайная величина, принимающая целые значения в интервале от 0 до N_0 . Равномерность распределения означает, что вероятность каждого значения случайной величины одна и та же¹⁴.

Точно так же равномерно распределенной случайной величиной мы будем считать время, которое требуется кассиру на обслуживание покупателя. Пусть данная случайная величина изменяется в пределах от T_0 до T_1 .

Кроме того, прежде чем подойти к кассе, покупатель проводит некоторое время в торговом зале, выбирая товары. Это тоже случайная величина, и пусть она тоже равномерно распределена в интервале от V_0 до V_1 .

Набрав корзину с товарами, покупатель идет к той кассе, где меньше очередь. Поэтому можно считать, что длина очереди во всех кассах одинакова. Мы хотим найти такое число k — количество касс, чтобы очередь в каждую из них не превышала m человек.

Таким образом, для моделирования процесса обслуживания покупателей нам трижды требуется случайное число. Чтобы его получать, используются так называемые датчики случайных чисел (сокращенно ДСЧ). Как правило, в любом языке программирования есть оператор, присваивающий переменной случайное значение из промежутка $[0; 1]$. Есть такой оператор и в электронной таблице Microsoft Excel. Но на этот раз мы запишем компьютерную модель в виде алгоритма.

Пусть по истечении t минут в торговом зале магазина находится a_t покупателей. За следующую минуту в магазин зайдет еще $N_0 \cdot \text{ДСЧ}$ покупателей. Иными словами, $a_{t+1} = a_t + N_0 \cdot \text{ДСЧ} - b_t$, где b_t — количество покупателей, ушедших в кассы оплачивать покупки. Как же определить число b_t ? Будем рассуждать так. Поскольку максимальная продолжительность выбора покупок V_1 , то все a_t покупателей зашли в торговый зал не более как V_1 минут назад. Но некоторые из них находятся в зале

менее V_0 минут, т.е. они уж точно покупки еще не выбрали. Поскольку мы объявили равномерное распределение покупателей, на интервал времени $V_1 - V_0$ прихо-

дится $\frac{V_1 - V_0}{V_1} a_t$ покупателей. Но не все эти покупате-

ли отправились в кассу, поэтому и данное число мы должны умножить на очередное случайное число. Итак,

$$b_t = \frac{V_1 - V_0}{V_1} a_t \cdot \text{ДСЧ}. \text{ (Отметим, что, хотя здесь и на-}$$

писано снова ДСЧ, это уже другое число, нежели фигурировало в записи a_t .)

Начнем теперь подсчитывать, сколько человек стоит в очереди. Обозначим через c_t количество покупателей, стоящих в очередях в кассу. Тогда $c_{t+1} = c_t + b_t - d_t$, где d_t — количество покупателей, обслуженных кассами в течение t -й минуты. Время, уходящее на обслуживание одного покупателя, — случайная величина, равномерно распределенная на промежутке $[T_0; T_1]$. С помощью датчика случайных чисел это время моделируется величиной $(T_1 - T_0) \cdot \text{ДСЧ} + T_0$. Но тогда за 1 минуту будет обслужена $1 / ((T_1 - T_0) \cdot \text{ДСЧ} + T_0)$ "часть" покупателя. В k кассах эта величина будет соответственно в k раз больше. Следовательно, $d_t = k / ((T_1 - T_0) \cdot \text{ДСЧ} + T_0)$.

Осталось сформулировать критерий "большой очереди". Напомним, что мы договорились считать очередь большой, если в каждую кассу стоит больше, чем m человек, т.е. когда $c_t / k > m$.

Чтобы полностью определить величины a_t , b_t , c_t и d_t , надо еще задать начальные значения этих величин: a_0 , b_0 , c_0 и d_0 . Последовательно вычисляя данные величины, будем подсчитывать количество минут, когда очередь оказывалась большой. Если число таких минут в течение часа оказывается большим, значит, касс работает мало и надо открыть дополнительные. Если же таких минут не оказалось вообще, то можно попробовать уменьшить число работающих касс.

Как было объявлено ранее, компьютерную модель мы представим в виде алгоритма¹⁵.

алг модель кассового обслуживания (**арг** вещ N_0 , T_0 , T_1 , V_0 , V_1 , цел k , m , **рез** вещ r)
дано $T_0 < T_1$ и $V_0 < V_1$

| N_0 — максимально возможное число покупателей, заходящих в магазин в течение минуты,
| $[T_0; T_1]$ — промежуток времени, необходимый для обслуживания одного покупателя кассиром,
| $[V_0; V_1]$ — промежуток времени, необходимый покупателю для выбора товаров,
| k — количество работающих касс, m — максимально допустимая длина очереди в одну кассу

надо

| r — доля тех минут от общей продолжительности времени работы магазина,
| когда очередь в кассы превышала допустимую длину

нач вещ a , b , c , d , T , s

вывод "Введите максимально возможное число посетителей, входящих в магазин в течение минуты"

¹⁴ Хорошим примером равномерно распределенной случайной величины является, например, число очков, выпавших при бросании игрального кубика, — игральный кубик как раз должен удовлетворять тому условию, что выпадение любой его грани равновероятно. С другой стороны, такая случайная величина, как сумма очков, выпавших при одновременном бросании двух игральных кубиков, уже не является равномерно распределенной. Обсуждение этих вопросов на уровне, доступном для учащихся базового звена общеобразовательной школы, можно найти в книгах [7] и [12]. Отметим, что согласно концепции математического образования в 12-летней школе изучение элементов теории вероятности и математической статистики предусматривается, начиная с 5-го класса.

¹⁵ Для удобства читателя мы будем записывать алгоритмы на школьном алгоритмическом языке. Мы надеемся, что перевести их на любой другой язык программирования читателю не представит труда.

ВВОД N0**ВЫВОД** **НС** "Введите два числа, задающие промежуток времени, необходимый для обслуживания одного покупателя"**ВВОД** T0, T1**ВЫВОД** **НС** "Введите два числа, задающие промежуток времени, необходимый покупателю для отбора товаров"**ВВОД** V0, V1**ВЫВОД** **НС** "Введите максимально допустимую длину очереди"**ВВОД** m**ВЫВОД** **НС** "Введите предлагаемое вами количество работающих касс"**ВВОД** k**ВЫВОД** **НС** "Введите предлагаемое вами общее время, в течение которого моделируется работа магазина"**ВВОД** T

a := 0; b := 0; c := 0; d := 0

s := 0 | количество минут, когда очередь превышала допустимую длину

нц T **раз**

a := a + N0 * rnd(1) - b

если a < 0**то** a := 0 | в магазине не может находиться отрицательное количество человек**все**

c := c + b - d

если c < 0**то** c := 0 | в очереди не может стоять отрицательное количество человек**все****если** c / k > m**то** s := s + 1**все**

b := a * (V1 - V0) / V1 * rnd(1)

d := k / ((T1 - T0) * rnd(1) + T0)

кц

r := s / T

ВЫВОД **НС** "При данном количестве работающих касс"; **ВЫВОД** k**ВЫВОД** **НС** "доля плохих минут составляет"; **ВЫВОД** r**кон**

Результаты работы этого алгоритма для различных наборов начальных данных представлены в табл. 16—18.

Таблица 16

Количество работающих касс	1	2	3	4	5
Доля плохих минут	0,99994	0,99951	0,00492	0	0

 $N_0 = 4; T_0 = 0,5; T_1 = 2; V_0 = 3,5; V_1 = 6; m = 3$

Таблица 17

Количество работающих касс	7	8	9	10	11
Доля плохих минут	0,99989	0,99988	0,99932	0,93705	0,07146

 $N_0 = 10; T_0 = 1; T_1 = 3,5; V_0 = 4; V_1 = 10; m = 3$

Таблица 18

Количество работающих касс	3	4	5	6	7	8
Доля плохих минут	0,99989	0,99989	0,99982	0,93601	0,01193	0,0001

 $N_0 = 6; T_0 = 1; T_1 = 3,5; V_0 = 4; V_1 = 8; m = 3$

И здесь обнаруживается закономерность, которую хорошо знают в странах с так называемым "обществом потребительских интересов" и весьма непривычную для нашего общества, где подобное название было почти что ругательством. Обратим внимание на то, что с увеличением числа касс ситуация из очень плохой скачком меняется на очень хорошую. Ведь, скажем, доля 0,93 означает, что очереди в кассах имеются на протяжении 55 минут каждого часа, а доля 0,07 — что такие очереди будут в среднем всего лишь 4 минуты за час¹⁶. В последнем случае у руководства магазина возникает соблазн закрыть хотя бы одну кассу. Но стоит это сделать, как сразу возникают нерассасывающиеся очереди и покупатель уйдет в соседний магазин, где его обслужат без очереди. У опытного менеджера очередей в магазине не будет не потому, что там слишком много

¹⁶ Вывод о скачкообразном изменении ситуации мы сделали на основе нескольких компьютерных экспериментов с моделью. Но имеется математическая теория систем массового обслуживания, которая этот вывод строго обосновывает. Правда, эта теория не всегда способна указать, сколько именно надо открыть касс, проложить телефонных линий и т.п. Для получения таких конкретных рекомендаций опять-таки требуется компьютерное моделирование. Здесь проявляются непростые взаимоотношения между теорией и компьютерной практикой, о которых мы будем еще вести речь чуть позже, при обсуждении проблем адекватности.

продавцов или кассиров, а потому, что их там столько, сколько нужно.

Вычислительные методы, использующие датчик случайных чисел, получили название методов Монте-Карло (по названию города, где расположена знаменитая рулетка, которую можно рассматривать как “генератор” случайных чисел).

У школьников после разбора большого количества задач на моделирование процессов из разных научных областей может сложиться впечатление, что математические модели нужно строить только для решения задач, далеких от математики. На самом деле и в математике для решения задач часто требуются математические модели. Одна из таких задач — вычисление площадей. Конечно, для простейших фигур (прямоугольников, многоугольников, кругов) вычисление площади не составляет труда: надо в известные формулы подставить исходные данные. А как быть, если фигура имеет сложную форму?

Для школьника нахождение площади произвольной плоской фигуры — плохо поставленная задача. Ведь он не располагает каким-либо определением площади¹⁷. Понятие площади формируется через использование палетки (прозрачной клетчатой бумаги), которая накладывается на измеряемую фигуру, после чего подсчитывается суммарная площадь квадратиков, попавших в фигуру (см. рис. 58а). При этом считается очевидным (т.е. фактически берется в качестве предположения), что чем мельче клетки, тем точнее будет результат, независимо от того, как наложить палетку на фигуру¹⁸. Легко понять, что этот прием сродни тому способу построения дискретных моделей, который разбирался нами, скажем, для процесса движения твердого тела. В данном случае мы вместо плохо поставленной задачи “найти площадь фигуры” получаем модель этой задачи — построение достаточно мелкой сетки, подсчет количества квадратиков, попавших в фигуру, и умножение этого числа на площадь одного квадратика (мы уж здесь не обсуждаем, как получается формула площади квадрата — можно считать, что сторона квадратика палетки у нас всегда число рациональное). Можно для экономии времени объединить ряды клеток в прямоугольники и подсчитывать площади прямоугольников (см. рис. 58б). На тех, кто еще помнит, что такое интеграл и как его приближенно считать методом прямоугольников, повест от этого родным и знакомым.

¹⁷ Более того, школьник, как правило, не располагает даже определением геометрической фигуры. В некоторых учебниках под фигурой понимают произвольное множество точек. В других — это часть плоскости, ограниченная некоторой линией (не обязательно замкнутой; например, угол — это фигура, представляющая собой часть плоскости, заключенную между двумя лучами, имеющими общую вершину). Отметим, что фигура может быть неограниченной (т.е. не являться частью плоскости, ограниченной некоторой замкнутой линией) и тем не менее иметь конечную площадь. Мы здесь будем рассматривать только фигуры, ограниченные непрерывной замкнутой линией.

¹⁸ В курсе высшей математики доказывается, что действительно при измельчении клеток палетки последовательность получающихся чисел имеет предел, который не зависит от способа измельчения и наложения палетки. Этот предел совпадает с площадью фигуры.

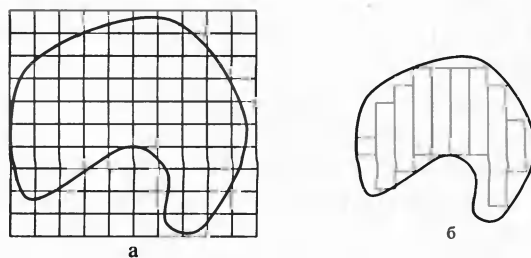


Рис. 58. Подсчет площади фигуры с помощью палетки а и вписанных прямоугольников б

А вот другой подход к определению площади. Представьте себе, что мы покрасили нашу фигуру слоем краски одной и той же толщины по всей фигуре. А затем подобрали квадрат, для покраски которого требуется столько же краски, чтобы покрыть его слоем той же толщины. Каждому ясно, что эти фигуры имеют одинаковую площадь, а площадь квадрата подсчитать не проблема¹⁹. Для решения задачи с помощью компьютера такой подход, однако, не годится — не умеет компьютер красить фигуры ровным слоем²⁰.

Далеко не всякий математик возьмется доказать, почему указанные два подхода — палетка и покраска — дают один и тот же результат: площадь фигуры. И, несмотря на это, мы свободно оперируем понятием “расход краски на 1 кв. м поверхности”, понимая, что форма поверхности нас не волнует, лишь бы площадь была.

Представим себе, что мы нашу крашенную фигуру вынесли на улицу сохнуть, а тут начался снегопад. Снежинки падают, конечно, случайным образом, но при этом (именно в силу случайности, т.е. отсутствия предпочтения какой-либо точке) покрывают нашу фигуру ровным

¹⁹ Можно представить себе этот процесс, как трансформацию фигуры в квадрат путем перемещения мельчайших кусочков краски. Тем самым получается, что наша фигура и квадрат как бы составлены из одинаковых частей (как говорят математики, равносоставлены). Этот подход к определению площади также изучался математиками. Имеет место замечательная теорема Больяй — Гервина, утверждающая, что два многоугольника имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда они равносоставлены. Иными словами, если два многоугольника имеют одинаковую площадь, то один из них (неважно какой) всегда можно разрезать так, что из получившихся частей можно сложить второй многоугольник. В частности, любой многоугольник можно разрезать на такие части, что из них затем можно сложить квадрат. (Между прочим, из этой теоремы можно сделать неплохую задачу для олимпиады по программированию — составить программу, разрезающую многоугольник, заданный, например, координатами вершин, на части, из которых можно составить квадрат.) К сожалению, эта теорема неверна для произвольных плоских фигур — будь иначе, не пришлось бы тратить столько усилий на определение, что такое площадь фигуры.

²⁰ Красить масляной краской компьютер, конечно, не умеет, но до идеи использовать раскраску для подсчета площади сложной фигуры наши школьники-олимпиадники додумались. Они предлагают компьютеру залить нужную фигуру каким-либо цветом, а затем просто подсчитывают (не вручную, конечно, а с помощью составленной программы) количество пикселей на экране, имеющих заданный цвет. Деля получившееся число на количество пикселей в единичном квадрате, они получают весьма точный ответ: при тестовой проверке такой программы жюри, как правило, бывает удовлетворено полученной точностью ответа.

слоем. Значит, количество снега пропорционально площади фигуры. Переведем теперь эту ситуацию на математический язык. Пусть наша фигура расположена в некотором квадрате. В квадрат бросается последовательность равномерно распределенных случайных точек (слова "равномерно распределенные" как раз и означают, что попадание точки в любые две области одной площади равновероятно). Естественно предположить, что количество точек, попадающих в фигуру, пропорционально площади этой фигуры. Это и есть модельное предположение. Тогда площадь фигуры равна произведению площади квадрата на отношение числа точек, попавших в фигуру, к числу точек, попавших в квадрат. Тем самым мы построили еще одну модель площади фигуры. Как и для палетки, эта модель дискретна и лишь приближенно дает значение площади. Точность возрастает по мере увеличения числа бросаемых точек (для палетки аналогично — уменьшение стороны квадратика приводит к увеличению числа этих квадратиков и возрастанию точности). Применять компьютер для вычисления площади по такой модели можно лишь в том случае, если у соответствующего исполнителя есть допустимое действие — порождение случайного числа (случайная точка — это пара случайных чисел). При обсуждении задач массового обслуживания мы уже говорили, что для этих целей имеются датчики случайных чисел.

Компьютерную модель задачи мы снова представим в виде алгоритма.

Пусть дана фигура F . Поместим ее в квадрат, одна вершина которого совпадает с началом координат и две его стороны располагаются на осях координат (см. рис. 59). Пусть сторона получившегося при этом квадрата равна a . Тогда его площадь равна a^2 .

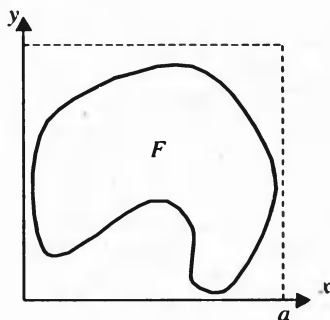


Рис. 59

Если N — общее число точек, брошенных в данный квадрат, а M — число тех точек, которые попали в фигуру F , то справедливо следующее приближенное равенство:

$$\frac{S_F}{a^2} \approx \frac{M}{N}$$

Отсюда получаем:

$$S_F \approx \frac{M}{N} a^2$$

Вот как будет выглядеть алгоритм:

```

алг площадь (арг вещь  $a$ , цел  $N$ , рез вещь  $S$ )
дано
|  $N$  — количество точек, бросаемых в квадрат
| со стороной  $a$ 
надо |  $S$  — площадь фигуры  $F$ 
нач цел  $M$ , вещ  $x$ ,  $y$ , лог  $q$ 
вывод "Введите величину стороны квадрата"
ввод  $a$ 
вывод нс "Введите количество точек,
бросаемых в квадрат"
ввод  $N$ 
 $M := 0$ 
нц  $N$  раз
 $x := a * \text{rnd}(1)$ ;  $y := a * \text{rnd}(1)$ 
точка лежит внутри ( $x$ ,  $y$ ,  $q$ )
если  $q = \text{да}$ 
то  $M := M + 1$ 
| точек, попавших в фигуру  $F$ ,
| стало на одну больше
все
кц
 $S := M / N * a^2$ 
вывод нс "Площадь фигуры  $F$  приближенно равна";
вывод  $S$ 
кон
    
```

В этом алгоритме используется вспомогательный алгоритм, определяющий, лежит ли точка с заданными координатами x и y внутри фигуры F . Результат записывается в логическую переменную q . Конечно, как именно этот вспомогательный алгоритм "выясняет", лежит ли точка с данными координатами внутри фигуры, зависит от допустимых действий исполнителя, для которого этот алгоритм составлен. Имея в виду какой-либо стандартный язык программирования, мы будем предполагать, что граница фигуры F задана тем или иным аналитическим выражением. Тогда и проверять нужно будет выполнение подходящего неравенства или системы неравенств.

Продолжение следует

Продолжение. Начало на с. 8

1. Задачи на операции ввода и вывода. Подобный класс задач важен особенно для компьютерного задачника, так как, выполняя подобные задания, учащиеся смогут понять формальные требования, которые предъявляются к программам при их автоматическом тестировании.

Пример 1.

Написать программу, которая запрашивает имя пользователя с помощью приглашения

Введите Ваше имя:

вводит имя с клавиатуры и выдает на экран приветствие
Здравствуй, <введенное имя>!

Проверку подобных задач можно проводить, сравнивая правильный ответ на тест с выдачей программы учащегося с точностью до пробелов и символов перевода строки.

2. Задачи на оператор присваивания. Несмотря на кажущуюся простоту, в данный раздел могут быть включены задачи различной сложности. В частности, требование не использовать в программе условный оператор и операторы цикла переводит ряд элементарных задач в задачи повышенной сложности. Такое ограничение с методической точки зрения можно рассматривать как работу с исполнителем, имеющим ограниченный набор команд.

Пример 2.

Обозначим дни недели числами от 1 — понедельник до 7 — воскресенье, соответственно. Программа должна вводить с клавиатуры два натуральных числа: $1 \leq N \leq 31$ — число в текущем месяце и $1 \leq M \leq 7$ — день недели для первого числа в текущем месяце. Вывести на экран число от 1 до 7, обозначающее, на какой день недели приходится число N .

Пример 3.

Ввести с клавиатуры 2 целых числа: $0 \leq H < 12$, $0 \leq M < 60$, указывающие момент времени H часов M минут. Определить и вывести на экран наименьшее число полных минут, которое должно пройти до того момента, когда часовая и минутная стрелки на циферблате совпадут.

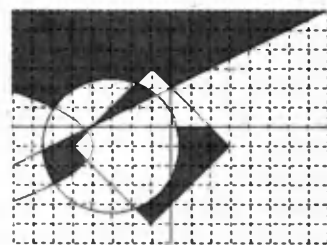
Пример 4.

По введенному с клавиатуры вещественному числу x вывести на экран целочисленное значение функции $\operatorname{sgn} x$. Решения этих и других подобных задач можно найти в [3]. При решении данного класса задач учащиеся осваивают основные операции и функции изучаемого языка программирования. Особое внимание при этом уделяется арифметике остатков, знания по которой, как показывает практика, у учащихся недостаточны. Однако именно операции целочисленной арифметики имеют важную роль в программировании.

3. Задачи на логические выражения. При изучении логических выражений полезным является выполнение следующего практического задания.

Пример 5.

Каждому учащемуся выдается индивидуальный рисунок.



То есть на координатной плоскости изображены линии, описываемые уравнениями окружности, прямой, парабол $y = f(x)$ и $x = f(y)$, ромба, прямоугольника и т.п. (сложность рисунка зависит от категории учащихся). Несколько областей, ограниченных этими линиями, заштрихованы. Требуется описать всю заштрихованную часть плоскости с помощью одного логического выражения. Программа должна запрашивать с клавиатуры координаты (x, y) некоторой произвольной точки плоскости и определять, принадлежит ли точка с координатами (x, y) заштрихованной области. Ответ выдать в следующем виде: true, если точка с координатами (x, y) принадлежит заштрихованной области, и false, если точка с координатами (x, y) не принадлежит ей.

При выполнении задания от учащихся следует требовать, чтобы для описания каждой области была введена своя логическая переменная, что упрощает процесс отладки и поиска ошибок при приеме задания. Основное логическое выражение конструируется только из таких переменных. Имена переменных должны быть mnemonic. Например: InCircle1, UpperLine1.

Примечание. В СУНЦ МГУ автоматическая проверка данного задания производится следующим образом. Программа учащегося конвертируется в функцию с логическим результатом без какого-либо собственного вывода на экран, значения этой функции вычисляются для части плоскости, изображенной на рисунке, и выдаются на графический экран (значению true соответствует белый цвет пикселя, false — черный). Далее не составляет труда сравнить рисунок на экране с исходным. Подробнее об организации подобного задания, его проверке и вариантах задач можно будет прочитать в следующем номере «Информатики».

4. Условный оператор. Цель данного раздела задачника — научить учащихся составлять алгоритмы с использованием простых и вложенных операторов условия и выбора.

Пример 6.

По введенным с клавиатуры значениям целочисленных переменных y (номер года), m (номер месяца), d (номер дня) определить — правильная эта дата или нет. Если правильная, то выдать на экран дату следующего дня в формате $d.m.y$, в противном случае вывести фразу: Дата некорректна.

Пример 7.

Для введенных с клавиатуры действительных значений параметров a, b, d решить уравнение относительно x : $ax^3 + bx^2 + dx + d^3a = 0$. Упорядочить полученные значения для x по возрастанию и выдать каждое из них в новой строке экрана с точностью до четырех значащих цифр после точки. Если решение отсутствует, то выдать фразу:

Нет решения,

а в случае бесконечного множества решений:

x — любое.

5. Операторы цикла. Основные классы задач, относящиеся к данному разделу, это задачи на обработку числовых последовательностей без использования массивов для их хранения, включая нахождение НОД или НОК для последовательностей натуральных чисел, задачи на рекуррентные соотношения и суммирование числовых рядов. В последнем случае важное значение имеет эффективность программы. Так, при суммировании рядов, аналогичных рядам Тейлора, операции возведения в степень или циклы для вычисления целочисленной степени или факториала применяться не должны. Вместо этого каждое следующее слагаемое должно выражаться через предыдущее с помощью основных арифметических операций. Данный факт следует учитывать при автоматическом тестировании подобных программ.

Пример 8.

С клавиатуры вводится последовательность различных натуральных чисел, за которой следует 0. Определить и вывести на экран значение наименьшего и наибольшего членов последовательности, а также их среднее арифметическое.

Приведем также менее стандартные примеры задач, использующих операторы цикла.

Пример 9.

Вычислить значение следующего выражения с максимальной возможной точностью:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \dots}}}}$$

Пример 10.

С клавиатуры вводится действительное число $0 < e < 1$. Вычислить следующую сумму, не учитывая слагаемые, меньшие e :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C(k)}{k!}.$$

Здесь $C(k)$ — количество цифр в числе k .

Пример 11.

По введенному действительному значению радиуса круга ($0 \leq R \leq 100\,000$) вычислить количество точек с целочисленными координатами, попадающих в круг радиуса R с центром в начале координат. Функции действительных переменных, такие, как $\sin$, $\cos$, $\sqrt{}$, не использовать.

Пример 12.

Вывести логическое значение `true` или `false`, в зависимости от того, можно или нельзя представить данное число n в виде суммы двух квадратов. Не использовать вложенные циклы.

Пример 13.

Подсчитать число пятниц, приходящихся на 13-е числа в XX веке, если известно, что 13 января 1901 года было воскресенье.

6. Простейшие операции над одномерными массивами. Цель данного раздела задачника — научить учащихся правильно описывать, вводить, выводить и обрабатывать одномерные массивы. Стандартными в данном разделе следует считать задачи на поиск максимального и минимального элементов, сдвиг и перестановку элементов массива и, наконец, его сортировку. Покажем также нетривиальные задачи, при решении которых используются одномерные массивы.

Пример 14 (см. [13]).

Вычислить по схеме Горнера значение полинома

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ в точке } x_0$$

Пример 15 (см. [5]).

С клавиатуры вводятся два целых числа $1 \leq m$, $n \leq 100$, а затем $m + n$ элементов целочисленных элементов массива, каждый из которых по модулю не превосходит 32 767. Не используя дополнительных массивов, требуется переставить местами первые n и последующие m элементов массива. Вывести на экран полученный в результате перестановки массив, разделяя его элементы пробелами.

Пример 16.

С клавиатуры вводится некоторый текст на английском языке, заканчивающийся точкой. Распечатать сведения о том, сколько каких английских букв в тексте. Учесть, что в тексте могут встречаться символы, отличные от латинских букв. Прописные и строчные буквы при подсчете не различать. Вывести на экран 26 чисел, каждое в новой строке, первое из которых соответствует количеству букв *a* в тексте, второе — букв *b* и т.д.

7. Процедуры и функции. Наиболее удачным примером для применения процедур на начальном этапе обучения программированию являются задачи сортировки и поиска [3, 6]. Другой класс задач, требующий естественного применения процедур и функций, — простейшие численные методы интегрирования, а также решение трансцендентных уравнений методами деления пополам, хорд, касательных или итераций.

Содержание тематической части задачника

После изучения основ программирования на любом алгоритмическом языке круг решаемых задач существенно зависит от категории учащихся. Поэтому при наполнении данной части задачника следует учитывать потребности того или иного учебного заведения. Тематические подборки задач можно найти в [3, 4], а также использовать задачи различных олимпиад по программированию и информатике, в частности, опубликованные в [7, 8, 9, 10, 11, 12]. Сформулируем лишь некоторые из тем, задания по которым могут быть полезны для широкого круга учащихся.

1. Задачи по системам счисления. Предлагаемый в [13] набор задач позволяет не только овладеть данным разделом теоретической информатики, но и усовершенствовать технику программирования.

2. Задачи на “длинную арифметику” [13]. Помимо традиционных задач на сложение, вычитание, умножение и целочисленное деление “длинных” чисел, в данный раздел можно включить различные задачи, получить точный ответ в которых можно, лишь самостоятельно реализовав те или иные арифметические операции.

3. Задачи на использование динамических структур данных, таких, как: список, стек, очередь, дерево, сбалансированное дерево бинарного поиска — и т.п.

4. Алгоритмы на графах. В частности, наиболее часто в программировании встречаются следующие задачи: обход графа в глубину и в ширину, подсчет компонент связности, построение минимального остовного

дерева, поиск кратчайшего пути в графе, нахождение эйлерова цикла, задача коммивояжера (гамильтонов цикл), задачи о размещении [7].

5. Целочисленные задачи линейного программирования. В том числе поиск наибольшего паросочетания в двудольном графе, задача о назначениях, задача о максимальном потоке, общая задача линейного программирования, при решении которой используется симплекс-метод.

6. Задачи, решаемые методом динамического программирования [14].

7. Задачи на полный перебор вариантов, при решении которых используется перебор с возвратом с применением метода ветвей и границ и других методов сокращения перебора. В частности, задачи на программирование игр и головоломок с использованием отсечений [14].

8. Комбинаторные задачи. Для каждой из основных комбинаторных конфигураций — множество всех подмножеств, сочетания, перестановки, размещения и т.п. — можно поставить следующие задачи. Для заданных входных параметров подсчитать количество всех возможных конфигураций того или иного типа, сгенерировать все конфигурации соответствующего типа, определить конкретную конфигурацию по ее номеру в лексикографическом порядке конфигураций и, наоборот, по конфигурации определить ее номер, для любой заданной конфигурации построить следующую в лексикографическом порядке [15].

9. Задачи вычислительной геометрии и компьютерной графики [16, 17].

10. Задачи по теории формальных грамматик и конечных автоматов. Начиная с проверки правильности записи арифметических выражений и подсчета их значений до элементов интерпретации и компиляции программ [3, 5].

11. Задачи криптографии [18].

Тесты по теоретической информатике

Компьютерный задачник логично использовать и для классического тестирования, причем в любой области знаний. Признавая очевидные преимущества проведения тестирования (возможность одновременно оценить большое количество учащихся по достаточно широкому кругу вопросов учебного курса), многие критики отмечают слишком узкий круг знаний и умений, которые можно проверить в тестовой форме. Тем не менее, по мнению психологов [19], при грамотном подходе именно тесты по информатике могут помочь раскрыть уровень развития способностей учащихся к выполнению операций содержательно-логического мышления. Несмотря на критические замечания относительно тестирования как способа проверки знаний учащихся, бесспорным можно считать тот факт, что с помощью тестирования можно по крайней мере выявить пробелы в знаниях.

На наш взгляд, на современном этапе развития преподавания информатики тестированию, особенно на всероссийском уровне, могут подвергаться лишь знания по ее теоретическим основам. А именно следующие разделы содержания образования по информатике: понятия информации и способы ее представления, системы счисления и формальная логика, а также основы алгоритмизации. Большинство тестов, опубликованных на

настоящий момент, в том числе по этим темам, подвергаются справедливой критике.

Каким же требованиям должен отвечать качественный, профессионально разработанный тест? Во-первых, такой тест должен быть надежным. То есть результат его выполнения не должен носить случайный характер. Вероятность “угадывания” в надежном тесте исключена. Надежность теста характеризуется последовательностью, устойчивостью оценок, получаемых с его помощью. Во-вторых, качественный тест должен быть валидным. То есть он должен измерять уровень развития именно тех умений и навыков, которые предполагали измерять его составители. Таким образом, при профессиональном тестировании можно быть уверенным, что знания и умения будут достойно оценены. Разработка тестовых заданий требует не только глубоких знаний предмета, не только дидактического опыта, но и специальных знаний и навыков в области теории и практики составления самих тестовых заданий. Эти знания и умения позволяют тестировать не столько *декларативный* уровень поверхностных знаний, основанный лишь на ассоциативных связях ключевых слов, но и более глубокий уровень реально ценных *операциональных* знаний, позволяющий реально использовать полученные знания на практике. Профессионально составленные тестовые задания также содержат поверхностные ассоциативные связи, но в качестве провокационных мнимых правильных ответов — *дистракторов*.

Наиболее часто встречающаяся ошибка при составлении ответов на тестовые задания со множественными вариантами ответа состоит в непродуманных дистракторах. Они либо явно неправдоподобны и не соответствуют элементарному здравому смыслу, либо просто выглядят значительно менее привлекательно, нежели правильный ответ. Включение же тестовых заданий в компьютерный задачник частично эти проблемы решает, так как для части вопросов варианты ответов можно не указывать вовсе, ожидая, что ответ будет введен пользователем самостоятельно.

Тем не менее приведем примеры нескольких, на наш взгляд, удачно составленных тестовых заданий по теоретической информатике. Правильные ответы в каждом из вопросов выделены жирным шрифтом.

Пример 17. (Олимпиада по базовому курсу информатики, Пермская обл., 2001 г.)

Сообщение на языке племени Мульти содержит 64 символа, что составляет 1/32 часть килобайта. Сколько символов содержит алфавит племени Мульти?

- | | |
|---------|--------|
| 1) 128. | 4) 8. |
| 2) 16. | 5) 64. |
| 3) 32. | |

Пример 18. (Олимпиада по базовому курсу информатики, Пермская обл., 2001 г.)

Два исполнителя — Мульти и Пульти проставляют 0 или 1 в каждую из имеющихся в их распоряжении клеточек. Мульти может закодировать таким образом 64 символа, а Пульти — в 2 раза меньше. Выбрать верное высказывание:

1) В распоряжении Мульти в два раза больше клеточек, чем у Пульти.

2) В распоряжении Мульти в два раза меньше клеточек, чем у Пульти.

3) В распоряжении Мульти на 32 клеточки больше, чем у Пульти.

4) В распоряжении Мульти на 1 клеточку меньше, чем у Пульти.

5) В распоряжении Мульти на 1 клеточку больше, чем у Пульти.

Пример 19.

Запись числа в четверичной системе счисления содержит 8 цифр. Из скольких цифр будет состоять запись того же числа в восьмеричной системе счисления?

- 1) 4.
- 2) 5 или 6.
- 3) 6.
- 4) 8.
- 5) 16.

Пример 20.

Для записи целых чисел в системе счисления "8—4—2" в младшем разряде используются цифры двоичной системы счисления; в следующем разряде — цифры системы счисления с основанием 4; в третьем разряде — системы счисления с основанием 8 и т.д. Чему равно максимальное трехзначное число этой системы счисления в десятичной системе?

- 1) 842.
- 2) 731.
- 3) 69.
- 4) 63.
- 5) 473.

Пример 21. (Олимпиада по базовому курсу информатики, Пермская обл., 2001 г.)

Выбрать высказывание, для которого будет истинно следующее логическое выражение:

$(X < 0) \text{ и } (Y \geq 0) \text{ и } (Z \geq 0) \text{ или } (Y < 0) \text{ и } (X \geq 0) \text{ и } (Z \geq 0) \text{ или } (Z < 0) \text{ и } (X \geq 0) \text{ и } (Y \geq 0).$

- 1) Хотя бы одно из чисел X, Y, Z положительно.
- 2) Хотя бы одно из чисел X, Y, Z отрицательно.
- 3) Хотя бы одно из чисел X, Y, Z не является положительным.
- 4) Только одно из чисел X, Y, Z является отрицательным.
- 5) Только одно из чисел X, Y, Z является неположительным.

Пример 22.

В булевой алгебре множеств, в частности, существуют следующие операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение и симметрическая разность. Какая из следующих пар операций НЕ является полной для всех приведенных (то есть через них нельзя выразить остальные две):

- 1) Объединение и дополнение.
- 2) Пересечение и дополнение.
- 3) Объединение и симметрическая разность.
- 4) Пересечение и симметрическая разность.
- 5) Объединение и пересечение.

Пример 23.

Процедура сортировки методом "прямого выбора" была применена к массиву 7 3 9 1 2 6 5 0. Как будет выглядеть этот массив после трех итераций алгоритма?

- 1) 0 1 2 3 9 6 5 7.
- 2) 0 1 2 7 3 9 6 5.
- 3) 3 7 9 1 2 6 5 0.
- 4) 5 3 0 1 2 6 7 9.
- 5) 3 1 2 5 0 6 7 9.

Пример 24.

I. Существует сортировка, у которой и число сравнений, и число присваиваний меньше, чем $O(N^2)$.

II. Существует сортировка, у которой число присваиваний даже в худшем случае составит $O(N)$ для произвольного массива.

III. Существует сортировка, у которой число сравнений даже в худшем случае $O(N)$ для произвольного массива.

Какие из этих высказываний справедливы?

- 1) I, II.
- 2) II, III.
- 3) I, III.
- 4) Все верны.
- 5) Правильного ответа среди перечисленных выше нет.

Пример 25.

Дополнительный код числа — 100 в 8- и 16-разрядных ячейках выглядит, как

- 1) 11100100 и 1000000001100100.
- 2) 10011011 и 1111111110011011.
- 3) 10011011 и 0000000010011011.
- 4) 10011100 и 1111111110011100.
- 5) 10011100 и 0000000010011100.

Заключение

Работа по совершенствованию и расширению задачника в настоящее время продолжается. Желающие обменяться опытом по созданию подобных задачников или внести свои пожелания и предложения могут обращаться к автору по адресу helen@1september.ru.

Литература

1. Базовый учебный план. Приказ Министерства образования РФ № 322 от 09.02.1998.
2. Пильщиков В.Н. Сборник упражнений по языку Паскаль. М.: Наука, 1989.
3. Андреева Е., Фалина И. Турбо-Паскаль в школе. М.: Изд-во Бочкаревой Н.Ф., 1998.
4. Абрамов С.А., Гнездилова Г.Г. и др. Задачи по программированию. М.: Наука, 1988.
5. Шень А. Программирование: теоремы и задачи. М.: МЦНМО, 1995.
6. Окулов С.М. Сортировка и поиск. Конспекты занятий. Информатика, № 33, 35, 36/2000.
7. Окулов С.М., Пестов А.А., Пестов О.А. Информатика в задачах. Киров: Вятский государственный педагогический университет, 1998.
8. Брудно А.Л., Каплан Л.И. Московские олимпиады по программированию. М.: Наука, 1990.
9. Кирюхин В.М., Лапунов А.В., Окулов С.М. Задачи по информатике. М.: АБФ, 1996.
10. Чернов А.В., Андреева Е.В., Панкратьев Е.В. и др. Московские студенческие олимпиады по программированию. М.: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 1999.
11. Беров В.И., Лапунов А.В. и др. Особенности национальных олимпиад по информатике. Киров: Триада-С, 2000.
12. Андреева Е.В. Задачи XIII Всероссийской олимпиады по информатике. Информатика, № 19/2001.
13. Андреева Е., Фалина И. Системы счисления и компьютерная арифметика. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.
14. Андреева Е.В. Еще раз о задачах на полный перебор вариантов. Информатика, № 45/2000.
15. Окулов С.М. Комбинаторные задачи. Информатика, № 7, 10, 13/2000.
16. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. М.: Мир, 1989.
17. Боресков А.В., Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Компьютерная графика: первое знакомство. М.: Финансы и статистика, 1996.
18. Введение в криптографию. Под ред. Яценко В.В. М.: МЦНМО, 1998.
19. Шмелев А.Г. Тесты по информатике. Послесловие. Информатика, № 44/1999.

Вопросы, задания и контрольные работы для начинающих программистов

В.П. Гладков, А.П. Шестаков,

г. Пермь

Продолжение. См. № 20, 33, 34/2001

4. Логический тип данных.

Логические выражения

4.1. Перечислите операции и функции, разрешенные над логическими данными.

4.2. Расставьте круглые скобки в следующих выражениях на Паскале, чтобы показать последовательность их вычисления:

а) $a = b$ or $a < c$ and not $b \leq c * 2$.

б) $a * 2 * c * \sin(x) - d = a * b/g$.

4.3. Какие круглые скобки в приведенных выражениях можно снять, не изменив значения этих выражений?

а) not (not (a < b) or (c >= d)).

б) ((a and b) or c) and d.

в) (((-a) < 25) and (not (a >= 16))).

г) ((a = (b + c/4)) and a) or

((x >= 3) and not (x < 16)).

д) ((((((a and b) or c) and d) or e) and f) or g).

4.4. Определите значения следующих высказываний:

а) Париж расположен на Сене и $2 + 3 = 5$.

б) 1 — простое число и 2 — простое число.

в) 1 — простое число или 2 — простое число.

г) $2 \cdot 2 = 4$ или белые медведи живут в Африке.

д) $2 \cdot 2 = 4$ и $2 \cdot 2 = 5$ и $2 \cdot 2 \geq 4$.

4.5. Сформулируйте отрицания высказываний:

а) Луна — спутник Марса.

б) Все простые числа нечетны.

в) 32 не делится на 4.

г) Сегодня светит солнце и не дует ветер.

д) Я поступаю в ПГТУ или в ПГУ.

е) Я умею решать квадратные уравнения или прыгать по лужам.

ж) Я сегодня пойду на лекцию по информатике и не пойду в деканат или я пойду в деканат и на дискотеку.

з) Солнце светит да не греет.

и) Сегодня мы пойдем в театр и не пойдем в кино.

4.6. Запишите на Паскале логические выражения истинные, если

а) x лежит на отрезке от 0 до 1.

б) x лежит вне отрезка от 0 до 1.

в) Трое друзей имеют карманные деньги.

г) Ни один из трех друзей не имеет карманных денег.

д) Только один из друзей имеет карманные деньги.

е) Хотя бы один из трех друзей имеет карманные деньги.

ж) Карманных денег любых двух друзей из трех хватит для покупки трех порций мороженого.

з) Общее количество денег у трех друзей — величина четная и не кратная 28.

и) Рост Васи на 2 см больше роста Кати.

к) Вес Лены на 12 кг меньше веса Толи.

л) Павел носит обувь на два размера больше, чем Александр и на три размера меньше, чем Шурик.

м) N рублей можно выдать только одними пяттерками.

н) Количество страниц в книге четное и кратно семи.

о) Точка лежит на отрезке $[a; b]$, но не в его центре.

п) В целом трехзначном числе нет цифры 2.

р) Числа a и b имеют разные знаки.

с) Числа a и b имеют одинаковые знаки.

т) Числа a и b оба равны нулю.

у) Только одно из чисел a или b равно нулю.

ф) Хотя бы одно из чисел a или b равно нулю.

х) Числа a и b или оба равны нулю, или имеют разные знаки.

ц) Числа a и b или оба равны c , или оба меньше c . Запишите отрицание этого высказывания.

4.7. Запишите на русском языке, что обозначает условие

if $(x + y + z) / 3 = x$

then оператор 1

else оператор 2.

4.8. Определите значение переменной a после выполнения фрагмента программы на Паскале:

$a := 0;$

if $a < 0$ then;

$a := 2;$

4.9. Прямая линия проходит через точки с координатами $(3; 0)$ и $(0; 9)$.

а) Напишите два разных условия, истинных, когда точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ лежат по разные стороны от прямой.

б) Запишите, что означает условие:

$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1) \cdot (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2) < 0$. (*)

в) Запишите, что означает условие:

$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1 < 0) \text{ and } (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2 > 0)$
or $(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1 > 0) \text{ and } (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2 < 0)$. (**)

г) Если условия (*) и (**) эквивалентны, то укажите достоинства и недостатки каждого из них. Если условия не эквивалентны, то укажите точки, в которых данные выражения имеют разные значения.

д) Запишите, что означает условие:

$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1) \cdot (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2) = 0$.

е) Запишите, что означает условие:

$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1) = (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2)$.

ж) Запишите, что означает условие:

$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1) \cdot (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2) > 0$.

з) Можно ли сказать, что условие

$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1) + (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2) = 0$

означает, что только одна из точек лежит на прямой?

и) Запишите, что означает условие:

$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1) \cdot (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2) \geq 0$.

к) Запишите, что означает условие:

$$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1) \cdot (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2) \leq 0.$$

л) Запишите, что означает условие:

$$(-3 \cdot x_1 + 9 - y_1) \cdot (-3 \cdot x_2 + 9 - y_2) \neq 0.$$

4.10. Равносиальны ли утверждения:

$$x \bmod 2 = 0 \text{ и } \text{int}(x/2) = x/2?$$

4.11. Какое из приведенных выражений вызовет ошибку компиляции и почему, если переменные имеют следующие значения: $a = 2, b = 2, c = 3, d = \text{false}, e = \text{true}$?

а) $e \text{ and not } d \text{ xor } (a = b) \text{ or } (b = c).$

б) $e \text{ and not } d \text{ xor } a = b \text{ or } b = c.$

4.12. Опишите типы переменных, используемых в следующих выражениях на Паскале:

а) $(e = 2) \text{ and } s \text{ or } (a = 2.3).$

б) $(a = a + 1) \text{ xor not } d \text{ and not } (s \leq 7).$

в) $a \text{ and not } b \text{ and } c \text{ and not } d.$

4.13. Установите, может ли правильная запись условия (логического выражения) на Паскале иметь вид:

а) $(a > a) \text{ and } (a > a).$

б) $(a > a) \text{ and } (a < a).$

в) $(a > a) \text{ or } (a > a).$

г) $(a > a) \text{ or } (a < a).$

д) $(a \geq a) \text{ and } (a \geq a).$

е) $(a \geq a) \text{ or } (a \geq a).$

ж) $(a \geq a) \text{ and } (a \leq a).$

з) $(a \geq a) \text{ or } (a \leq a).$

и) $\text{true and false}.$

к) $\text{true and true}.$

л) $\text{false and false}.$

м) $\text{true or false}.$

н) $\text{true or true}.$

о) $\text{false or false}.$

п) $\text{true or } (1/0 > 0).$

р) $(1/0 > 0) \text{ or true}.$

4.14. Установите, истинны или ложны следующие условия:

а) $\text{not}((6 < 4) \text{ and } (4 > 8)).$

б) $(a \leq a + 1) \text{ or } (12 - 3 > 0).$

в) $((2 \leq 2) \text{ and } (3 \geq 3)) \text{ or } (15 > 25).$

г) $(x > 5) \text{ and } (x < x + 1).$

д) $a \text{ and not } a.$

е) $a \text{ or not } a.$

ж) $a \text{ and true}.$

з) $a \text{ and false}.$

и) $a \text{ or true}.$

к) $a \text{ or false}.$

л) $\text{not not } a.$

м) $a \text{ or } a.$

н) $a \text{ and } a.$

о) $\text{not } a \text{ and not } b = \text{not } (a \text{ or } b).$

п) $\text{not } a \text{ or not } b = \text{not } (a \text{ and } b).$

р) $a \text{ and } (b \text{ or } c) = (a \text{ and } b) \text{ or } (a \text{ and } c).$

с) $a \text{ or } (b \text{ and } c) = (a \text{ or } b) \text{ and } (a \text{ or } c).$

т) $a \leq b = \text{not } a \text{ or } b.$

у) $a \text{ and } b = (a < \text{true}) < b.$

ф) $\text{not } a = a < \text{true}.$

4.15. Объясните ошибки в записях:

а) $1 \text{ and } 0.$

б) $\text{true} + \text{false}.$

в) $\text{true} < 0.$

г) $\text{not } 2 = 5.$

д) $x > 0 \text{ or } y = 4.$

е) $\text{not not } b \text{ or or } d.$

ж) $\text{true} > \text{'true'}.$

4.16. Вычислите значения выражений:

а) $\text{false} < \text{true}.$

б) $\text{ord}(\text{false}) = 1.$

в) $\text{pred}(\text{true}).$

г) $\text{ord}(\text{succ}(\text{false})) > 0.$

д) $\text{not}(\text{pred}(c) \text{ or } (\text{ord}(c) = 1))$ при $c = \text{true}.$

е) $(p < \text{true}) = (q = \text{false})$ при $p = q = \text{true}.$

ж) $a \text{ and } b > a \text{ or } b$ при $a = \text{false}, b = \text{true}.$

з) $x < 2$ при $a = \text{true}, x = 1.$

и) $\text{not } a \text{ or add}(x)$ при $a = \text{true}, x = 1.$

к) $\text{ord}(a) < x$ при $a = \text{true}, x = 1.$

л) $\text{not odd}(n)$ при $n = 0.$

м) $t \text{ and } (p \bmod 3 = 0)$ при $t = \text{true}, p = 101010.$

н) $(x * y < 0) \text{ and } (y > x)$ при $x = 2, y = 1.$

о) $(x * y < 0) \text{ or } (y > x)$ при $x = 2, y = 1.$

п) $a \text{ or not } b$ при $a = \text{false}, b = \text{true}.$

4.17. Изобразите на плоскости (x, y) область, в которой и только в которой истинно условие:

а) $(y \geq x) \text{ and } (y + x \geq 0) \text{ and } (y < 1).$

б) $(\text{sqr}(x) + \text{sqr}(y) < 1) \text{ or } (y > 0) \text{ and } (\text{abs}(x) \leq 1).$

в) $(\text{trunc}(y) = 0) \text{ and } (\text{round}(x) = 0).$

г) $(\text{abs}(x) \leq 1) > (\text{abs}(y) \geq 1).$

д) $(\text{sqr}(x) + \text{sqr}(y) \leq 4) = (y \leq x).$

4.18. Запишите на русском языке условие, записанное на Паскале:

а) $(x = y) \text{ and } (x = z).$

б) $\text{odd}(n) = \text{odd}(k).$

в) $\text{ord}(a) + \text{ord}(b) = 1.$

г) $(a \leq x) \text{ and } (x < b).$

д) $\text{abs}(x - 0.5) < 3.$

е) $(x = y) \text{ and } (x < z) \text{ and } (y < z) \text{ or } (x = z) \text{ and } (x < y) \text{ and } (y < z) \text{ or } (z = y) \text{ and } (x < z) \text{ and } (y < x).$

ж) $k \bmod 10 = 5.$

з) $m \bmod n = 0.$

и) $x * y < 0.$

4.19. Определите тип и, если возможно, значения выражений.

var p, q, r, s: **boolean**; k: **integer**;

а) $\text{sqr}(2).$

б) $\text{sqr}(2.0).$

в) $\text{ord}(\text{'я'}) - \text{ord}(\text{'a'}).$

г) $\text{trunc}(-99.9).$

д) $-\text{round}(99.9).$

е) $-\text{round}(-99.9).$

ж) $\text{not } (p \text{ and } q) = \text{not } (\text{not } p \text{ and not } q).$

з) $10 \text{ div } 3.$

и) $10/3.$

к) $1266 \text{ div } 3 \bmod 5.$

л) $(p \text{ and } (q \text{ and not } q)) \text{ or not } (r \text{ or } (s \text{ or not } s)).$

м) $(\text{round}(-65.3) < \text{trunc}(-65.3)) \text{ and } p.$

н) $\text{odd}(k) \text{ or odd}(k + 1).$

Продолжение следует

Б О Л О Н Ь Я, П а р и ж, ... М о с к в а, ...

“Университет [нем. Universität от лат. *universitas* — совокупность] — высшее учебно-научное заведение, объединяющее в своем составе несколько факультетов, на которых представлена совокупность различных дисциплин”.

Словарь иностранных слов

Просвещение и наука неразрывно связаны с университетами. Это показывает многовековая история европейских университетов, в том числе отечественных. Первыми были открыты университеты в Болонье (1058 г.), Париже (1150 г.), Оксфорде, Монпелье, Кембридже, Саламанке (1215 г.), Падуе (1222 г.), Неаполе (1224). В Восточной Европе старейшими являются Карлов университет в Праге (1348 г.) и Ягеллонский университет в Кракове (1364 г.) [1, 2]. В Средние века в университетах было четыре основных факультета (медицинский, философский, правовой и богословский), а также подготовительный (дающий подготовку по общеобразовательным дисциплинам).

В России решительные меры, направленные на то, чтобы преодолеть отставание в различных областях, были приняты Петром I в начале XVIII столетия. Он понимал, какое значение имеет образование для военного дела, развития промышленности, судовождения, связи с другими странами, и осознавал необходимость создания школ всех уровней. По приглашению Петра I в Москву переехал профессор Абердинского университета Фарварсон. Вскоре после его приезда начала работу “школа математических и навигацких, то есть мореходно-хитростных, наук”. В 1715 году на ее базе была создана Морская академия, которую в том же году перевели в Петербург. Тогда же Петр I приказал разослать по два ученика этой школы, изучивших геометрию и географию, в различные губернии “для науки молодых ребяток из всяких чинов людей” [1]. Формировавшиеся таким путем школы получили название цифирных. Существовали также гарнизонные школы, где офицеры и унтер-офицеры обучали солдат и солдатских детей арифметике и грамоте.

В январе 1724 года Петр I подписал указ об организации Академии наук, а при ней гимназии и универ-



ситета. Объединение трех учреждений в одно обосновывалось тем, что “таким бы образом одно здание с малыми убытками, то же с великою пользою чинило, что в других государствах три разные собрания чинят”. Академический университет воспитал многих выдающихся деятелей отечественной науки и культуры. Однако в 1783 году его пришлось закрыть, поскольку во всем этом учебном заведении на трех факультетах — медицинском, философском и юридическом — были лишь два студента.

А задолго до этого М.В. Ломоносов (тогда уже известнейший ученый), мечтавший об открытии в России еще по меньшей мере одного университета, стал обращаться с письмами к просвещенному государственному деятелю И.И. Шувалову. В ряде писем Ломоносов представлял проекты организации университета в Москве, пытаясь учесть недостатки академического университета.

Одно из них начиналось так:

“Милостивый государь Иван Иванович. Полученный от Вашего превосходительства черновым доношением Правительственному сенату, к великой моей радости, я уверился, что объявленное мне словесно предприятие подлинно в действо произвести намерились к приращению науки, следовательно, к истинной пользе и славе отечества... уповав на отеческую Вашего превосходительства ко мне милость и великодушие, принимаю смелость предложить мое мнение о учреждении Московского университета кратко вообще”.

Ломоносов не случайно предложил организовать университет в Москве, а не в Петербурге. Москва являлась историческим центром России, центром русской культуры, в ней издавна

возникали “отдельные очаги интересов к науке”. Сюда было удобнее приезжать студентам, здесь легче было обеспечить их содержание.

12 января 1755 года императрица Елизавета Петровна подписала указ об учреждении университета, через 12 дней указ был опубликован, а 26 апреля состоялось официальное открытие университета [3–6].

В мае прибыли первые студенты, и вскоре первые профессора университета (ученики Ломоносова) Н.Н. Поповский и А.А. Барсов начали читать лекции на русском языке. Оба молодых преподавателя придерживались взглядов Ломоносова на значение русского языка в демократизации обучения, необходимость замены в университетском преподавании латинского языка на русский. Поповский сказал, что “нет такой мысли, кою бы на российском языке изъяснить было невозможно” [1]. И далее: “Начнем философию не так, чтобы разумел только один изо всей России или несколько человек, но чтобы каждый российский язык разумеющий мог удобно ею пользоваться...”.

Литература

1. Гнеденко Б.В. Введение в специальную математику. М.: Наука, 1991.
2. Кириллин В.А. Страницы истории науки и техники. М.: Наука, 1986.
3. Лихтеский В.П. Ученые — популяризаторы науки. М.: Знание, 1987.
4. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова // Большая советская энциклопедия. 2-е изд. М.: Гл. науч. изд-во “Большая советская энциклопедия”, 1954. Т. 28.
5. Справочник для поступающих в Московский университет в 2000 г. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
6. Первый в России // Информатика, № 15/2000.

Врач, изобретатель, математик

Окончание. Начало на с. 1

Джероламо Кардано являлся одним из самых знаменитых врачей своего времени, однако занятиями медициной он не ограничивался. Труды Кардано сыграли, например, большую роль в развитии алгебры [1–6]. Он установил, что полное кубическое уравнение можно привести к виду, свободному от члена второй степени, указав на зависимость между корнями и коэффициентами уравнения и на делимость многочлена на разность $x - a$, если a — его корень. Кардано одним из первых в Европе стал допускать отрицательные корни уравнений; в его работах впервые появляются мнимые величины. С именем этого ученого связывают формулу для вычисления корней кубического уравнения (*формула Кардано*).

Занимался Кардано и экспериментальными исследованиями (при помощи опыта он установил, что отношение плотности воздуха к плотности воды равно 1/50), и конструированием механизмов — к примеру, он создал подвеску из двух валов, качение которых не выводило карету из горизонтального положения. Теперь такая система подвески называется *карданом* (*карданный подвес, карданный вал, карданное сцепление*) и применяется в автомобилях (вообще же идея такой системы восходит к античности) [1, 7, 8].

Кардано является автором огромного количества книг, одно описание которых составило объемный труд "О собственных сочинениях". Многие годы были популярны работы Кардано в области философии и этики. Книга "Об утешении", переведенная на английский язык, оказала влияние

на Шекспира. Некоторые шекспироведы утверждают, что Гамлет произносит знаменитый монолог "Быть или не быть...", держа эту книгу в руках. Книга "О тонких материях", переведенная во Франции, служила популярным учебником по статике и гидростатике в течение всего XVII века.

Кардано утверждал, что невозможно построить вечный двигатель, являлся сторонником созданной еще в III веке до н. э. теории, объяснявшей приливы и отливы действием Луны и Солнца. Галилей пользовался указаниями Кардано, касающимися использования собственного пульса для измерения времени.

Кардано был вспыльчив и азартен. Сорок лет он играл в шахматы ("трудно оценить ущерб, который причинили они моим домашним делам") и двадцать пять лет — в кости ("но еще более шахмат повредили мне кости"). Ради игры Кардано временами бросал все занятия, попадал в неприятные ситуации. Он подготовил даже "Книгу об игре в кости", содержащую начала теории вероятностей, где рассмотрены также некоторые вопросы комбинаторики и описаны наблюдения, касающиеся психологии игроков.

За четыре месяца до смерти Кардано закончил писать свою автобиографию — книгу "О моей жизни", которая начинается так [1]: "Имея в виду, что из всего того, что может быть достигнуто человеческим умом, нет ничего отраднее и достойнее познания истины и что ни одно из соз-

даний смертных людей не может быть завершено, не подвергнувшись хотя бы в малой степени клевете, — мы... решили написать книгу о собственной жизни. Мы заверяем, что ничего не внесли в нее ради хвастовства или из желания что-нибудь приукрасить...". В ней всего несколько раз упоминается о занятиях математикой, зато (помимо прочего) подробно описываются исследования в области медицины.

Литература

1. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. М.: Наука, 1985.
2. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики: Пер. с нем. 4-е изд. М.: Наука, 1984.
3. Смирнов О.А., Майорова Т.С., Власова И.Г. 100 великих имен в математике, физике и географии. М.: Филологическое общество "СЛОВО", 1998.
4. Лишевский В.П. Рассказы об ученых. М.: Наука, 1986.
5. Кардано // Большая советская энциклопедия. 2-е изд. М.: Гл. науч. изд-во "Большая советская энциклопедия", 1953. Т. 20.
6. Котрелев Н.В. Кардано // Большая советская энциклопедия. 3-е изд. М.: "Советская энциклопедия", 1973. Т. 11.
7. Лурье М.И. Карданная передача // Большая советская энциклопедия. 3-е изд. М.: "Советская энциклопедия", 1973. Т. 11.
8. Стариков Е.М. Карданный механизм // Большая советская энциклопедия. 3-е изд. М.: "Советская энциклопедия", 1973. Т. 11.

Гл. редактор
С.Л. Островский
Зам. гл. редактора
А.И. Сенокосов
Редакция:
Е.В. Андреева
Н.Л. Беленькая
Л.Н. Картвелишвили
Н.П. Медведева
Дизайн и верстка:
Н.И. Пронская
Корректоры:
Е.Л. Володина,
С.М. Подберезина

©ИНФОРМАТИКА 2001
выходит четыре раза в месяц
При перепечатке ссылка
на ИНФОРМАТИКУ обязательна,
рукописи не возвращаются

Адрес редакции
и издателя:
121165, Киевская, 24
тел. 249-48-96
Отдел рекламы
тел. 249-98-70

Учредитель: ООО "Чистые пруды"

Зарегистрировано в Министерстве РФ по делам печати. ПИ № 77-7230 от 12.04.2001.
Отпечатано в ОИД "Медиа-Пресса", 125993, ГСП-3, Москва, А-40, ул. "Правды", 24.
Тираж 6000 экз.
Срок подписания в печать по графику 12.09.2001.
Номер подписан 12.09.2001.
Заказ № 15790
Цена свободная

ИНДЕКС ПОДПИСКИ
для индивидуальных подписчиков 32291
комплекта изданий 32744

Тел.: (095)249-31-38, 249-33-86. Факс (095)249-31-84

Internet: inf@1september.ru
WWW: http://www.1september.ru

Главный редактор
комплекта изданий
А.С. Соловейчик

Английский язык (Е.В. Громушкина), индекс подписки — 32025; Библиотека в школе (О.К. Громова), индекс подписки — 33376; Биология (Н.Г. Иванова), индекс подписки — 32026; Воскресная школа (монах Киприан (Яценко), индекс подписки — 32742; География (О.Н. Коротова), индекс подписки — 32027; Здоровье детей (А.У. Лекманов), индекс подписки — 32033; Информатика (С.Л. Островский), индекс подписки — 32291; Искусство (Н.Х. Исмаилова), индекс подписки — 32584; История (А.Ю. Головатенко), индекс подписки — 32028; Литература (Г.Г. Красухин), индекс подписки — 32029; Математика (И.Л. Соловейчик), индекс подписки — 32030; Начальная школа (М.В. Соловейчик), индекс подписки — 32031; Немецкий язык (М.Д. Бузова), индекс подписки — 32292; Русский язык (Л.А. Гончар), индекс подписки — 32383; Спорт в школе (Н.В. Школьников), индекс подписки — 32384; Управление школой (А.И. Адамский), индекс подписки — 32652; Физика (Н.Д. Козлова), индекс подписки — 32032; Французский язык (Г.А. Чесновицкая), индекс подписки — 33371; Химия (О.Г. Блохина), индекс подписки — 32034; Школьный психолог (М.Н. Сартан), индекс подписки — 32898.